
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA IZTAPALAPA
DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS E INGENIERÍA
DEPARTAMENTO DE FÍSICA



NOTAS DEL CURSO

FUNCIONES ESPECIALES Y TRANSFORMADAS INTEGRALES

Elaboradas por:

Román Linares Romero

lirr@xanum.uam.mx

<http://docencia.izt.uam.mx/lirr>

Índice general

Contenido	I
Prefacio	vii
1. Preliminares	1
1.1. Clase 1	1
1.1.1. El concepto de serie	2
1.1.2. Criterios de convergencia	4
1.1.3. Series de funciones	8
1.2. Clase 2	11
1.2.1. Función gama	11
1.3. Clase 3	23
1.3.1. Función factorial	24
1.3.2. Notación factorial doble	25
1.3.3. Continuación analítica de la función gama	25
1.3.4. Fórmula de reflexión	29
1.4. Clase 4	31
1.4.1. Delta de Dirac	32
1.4.2. Secuencias delta	33
1.4.3. Propiedades de la delta de Dirac	35
1.4.4. Distribuciones	37
1.5. Problemas	39
2. Series de Fourier	43
2.1. Clase 5	44

2.1.1.	Series de Fourier	44
2.1.2.	Características de las series de Fourier	49
2.1.3.	Series infinitas y función zeta de Riemann	50
2.2.	Clase 6	51
2.2.1.	Cambio de intervalo	51
2.2.2.	Forma compleja de la serie de Fourier	53
2.2.3.	El fenómeno de Gibbs	55
2.3.	Problemas	60
3.	Ecuaciones de la Física	65
3.1.	Clase 7	66
3.1.1.	Ecuaciones de la Física Teórica	66
3.1.2.	Propiedades de las ecuaciones	69
3.1.3.	Mecánica Cuántica	70
3.1.4.	Ecuación tipo Helmholtz en 1D	73
3.1.5.	Problemas de Mecánica Cuántica en 1D	75
3.2.	Clase 8	78
3.2.1.	Coordenadas cartesianas en 2D	78
3.2.2.	Coordenadas polares	83
3.3.	Clase 9	85
3.3.1.	Ecuación de Helmholtz en coordenadas cartesianas 3D	86
3.3.2.	Ecuación de Helmholtz en coordenadas polares esféricas	90
3.3.3.	Ecuación de Helmholtz en coordenadas Cilíndricas	93
3.4.	Clase 10	95
3.4.1.	Puntos singulares	95
3.4.2.	Soluciones en serie	100
3.5.	Clase 11	102
3.5.1.	Ecuaciones diferenciales auto-adjuntas	102
3.5.2.	Problema de valores propios de Sturm-Liouville	105
3.5.3.	Condiciones de Frontera	107
3.5.4.	Operadores Hermíticos o auto-adjuntos	109

3.6. Problemas	112
4. Polinomios de Legendre	117
4.1. Clase 12	117
4.1.1. Solución en serie	117
4.2. Clase 13	124
4.2.1. La fórmula de Rodrigues	124
4.2.2. Función generadora	126
4.2.3. Relaciones de recurrencia de los polinomios de Legendre	127
4.3. Clase 14	128
4.3.1. Relación de ortogonalidad	128
4.4. Clase 15	134
4.4.1. Ecuación de Laplace con simetría azimutal	134
4.5. Clase 16	137
4.5.1. Las funciones asociadas de Legendre	137
4.6. Clase 17	142
4.6.1. Los armónicos esféricos y la ecuación de Laplace	142
4.7. Problemas	145
5. Funciones de Bessel	151
5.1. Clase 18	151
5.1.1. Funciones de Bessel de primera clase	155
5.2. Clase 19	158
5.2.1. Funciones de Bessel de segunda clase	158
5.3. Clase 20	164
5.3.1. Propiedades de las funciones de Bessel	164
5.3.2. Función generadora	167
5.3.3. Ortogonalidad de las funciones de Bessel	168
5.4. Problemas	172
6. Polinomios de Hermite	175
6.1. Clase 21	176

6.1.1.	Oscilador armónico	176
6.2.	Clase 22	184
6.2.1.	Polinomios de Hermite	184
6.3.	Problemas	189
7.	Polinomios de Laguerre	193
7.1.	Clase 23	193
7.1.1.	Polinomios de Laguerre	193
7.1.2.	Relación de ortogonalidad	197
7.1.3.	Relaciones de recurrencia	197
7.2.	Clase 24	198
7.2.1.	Función generadora	198
7.2.2.	Polinomios asociados de Laguerre	199
7.2.3.	El átomo de hidrógeno	200
7.3.	Problemas	201
8.	Transformada de Fourier	203
8.1.	Clase 25	203
8.1.1.	Transformadas integrales	203
8.1.2.	La transformada de Fourier	205
8.1.3.	Forma exponencial de la transformada de Fourier	206
8.1.4.	Transformada de Fourier seno y coseno	208
8.2.	Clase 26	210
8.2.1.	Flacas versus gordas	210
8.2.2.	Transformada de Fourier de las derivadas	215
8.2.3.	Teorema de Convulación	217
8.3.	Clase 27	217
8.3.1.	Relación de Parseval	217
8.3.2.	Fórmula de suma de Poisson	218
8.4.	Problemas	221
9.	Transformada de Laplace	225

9.1. Clase 28	225
9.1.1. Definición de la transformada de Laplace	225
9.1.2. Relación entre las transformadas de Laplace y Fourier	228
9.1.3. Desarrollo en fracciones parciales	230
9.2. Clase 29	232
9.2.1. Transformada de Laplace de derivadas	232
9.2.2. Función delta de Dirac	234
9.2.3. Propiedad de traslación	235
9.3. Clase 30	238
9.3.1. Analogía RLC	238
9.3.2. Traslación	239
9.4. Problemas	241
Bibliografía	243
Índice analítico	245

Prefacio

Estas notas están basadas en los cursos de Funciones Especiales y Transformadas Integrales (FETI) que impartí en la Universidad Autónoma Metropolitana, Plantel Izta-palapa (UAMI), durante los trimestres 08P y 08O. El objetivo de su escritura es brindarle a l@s estudiantes un material de consulta acorde con nuestro plan de estudios, que complemente la exposición de la materia en el aula.

Es importante señalar que estas notas forman parte de un proyecto integral que está aún en construcción, y que en su totalidad constará de:

- Notas del curso.
- Tareas semanales, las cuales consisten en resolver varios problemas sobre los temas discutidos en clase.
- Un problemario donde se resuelven problemas tipo en cada uno de los temas que constituyen el curso y donde adicionalmente se presentan las soluciones a los problemas de tarea.
- Materiales diversos como: artículos, notas elaboradas por otros autores, páginas de internet relacionadas con el tema, etc.

Todos estos materiales podrán ser consultados en la página de internet¹:

<http://docencia.izt.uam.mx/lirr>

Existen muchos títulos excelentes sobre FETI y la mayoría de ellos están disponibles en la biblioteca de la UAMI. Ante este hecho uno se pregunta ¿Qué justifica la elaboración de estas notas? Estas notas *pueden* dar a l@s estudiantes varias ventajas, por ejemplo:

a) El estudiante tendrá la oportunidad de leer la clase por adelantado, en este proceso, se espera que surjan dudas y preguntas, las cuales enriquecerán sin duda las clases y las harán más interactivas. Estas son parte de las preguntas que los profesores esperamos surjan en nuestras clases, pero que a menudo nunca llegan porque l@s estudiantes están escuchando sobre el tema por primera vez.

b) Otra característica importante es que permitirá a l@s estudiantes obtener mayor

¹A este momento se pueden consultar las notas y las tareas. El problemario se pondrá a disposición una vez finalizada su elaboración. Algunos materiales también ya pueden ser consultados en la página.

provecho de la experiencia del profesor, ya que al exponer sus dudas, el profesor podrá visualizar el grado de claridad en los conceptos adquiridos por l@s estudiantes, y le permitirá enfatizar en la discusión en clase los temas que así lo requieran.

c) El estudiante podrá concentrarse en la discusión de la clase en vez de intentar copiar todo lo que el profesor escribe en el pizarrón, ya que ahora tendrá parte de los apuntes por adelantado.

Mi esperanza es que estas notas en verdad ayuden a tener un mejor curso y de mayor nivel ². Esta es la justificación y aporte de las notas.

Dado que un trimestre considera 33 clases en promedio, en estas notas se ha elegido un formato que presente el material en 30 lecciones. En todo momento se intenta relacionar el material que discutimos aquí, con el material que l@s estudiantes han aprendido en sus cursos pasados y con los temas que discutirán en sus cursos futuros.

El curso de FETI en la UAMI, tiene como prerrequisito haber aprobado las materias de ecuaciones diferenciales y algebra lineal. Por tal motivo en estas notas se supone que l@s estudiantes están familiarizad@s con las técnicas básicas de solución de ecuaciones diferenciales ordinarias así como con el concepto de espacios lineales de dimensión infinita.

El objetivo central del curso es estudiar las propiedades de las soluciones a algunas ecuaciones diferenciales de segundo orden, que aparecen en los cursos de Mecánica Clásica, Mecánica Cuántica, Electrodinámica, etc. Este objetivo nos llevará a estudiar dos tipos de problemas que están íntimamente relacionados. El primer tipo de problemas trata de la representación de una función arbitraria dada, mediante una serie infinita de funciones de un conjunto preescrito. El segundo tipo de problemas consiste en estudiar soluciones a ecuaciones diferenciales parciales de segundo orden, donde las soluciones satisfacen ciertas condiciones de frontera. Como veremos en este curso, existe una relación entre ambos problemas, explícitamente la relación es:

Las soluciones con valores a la frontera de una ecuación diferencial parcial se representan como una serie infinita de funciones.

Las funciones que constituyen la serie, dependenden de las simetrías de la ecuación diferencial bajo estudio. Los ejemplos que estudiaremos en este curso incluyen las funciones seno y coseno, los polinomios de Legendre, las funciones de Bessel, los polinomios de Hermite, los polinomios de Laguerre, etc.

Aunque he hecho un esfuerzo por que estas notas tengan el menor número de errores posible, es muy probable que este objetivo esté incompleto. Dado que estas notas estarán en revisión continua, les pido amistosamente a l@s lector@s, que reporten cualquier error

²Desde luego estas notas también pueden tener el efecto contrario. Puede suceder que l@s estudiantes opten por no entrar al curso, pues al final de cuentas ya lo tienen en sus manos y crearán saber lo que el profesor discutirá en la clase. Entregarán sus tareas y sólo se presentarán a los exámenes. Si esto sucede y los alumnos aprenden el material, las notas habrán cumplido de cualquier manera su objetivo.

que encuentren en las notas al correo electrónico: lirr@docencia.izt.uam.mx

UAM Iztapalapa, Ciudad de México.

Mayo de 2009.

Román Linares Romero.

1

Preliminares

Este primer capítulo se dedica al estudio de los elementos básicos necesarios para formular de manera adecuada los conceptos de interés principal en el curso. Algunos de los conceptos que discutiremos usted los estudió ya en cursos previos, en este caso el material se considera de repaso y su exposición será breve. Otros conceptos serán totalmente nuevos para usted y se utilizarán recurrentemente a lo largo del curso, por tal motivo es imperativo que los aprenda lo mejor posible. El capítulo está dividido en cuatro clases. En la clase 1 se da un repaso breve al concepto de series numéricas y series de funciones. Las clases 2 y 3 están dedicadas a definir las funciones gamma y la función factorial. Finalmente en la clase 4 se introduce el concepto de distribución, poniendo un énfasis especial en la delta de Dirac.

1.1. Clase 1

Uno de los objetivos principales de este curso es entender la estructura y propiedades de algunas funciones especiales. Como veremos después, las funciones especiales que estudiaremos en el curso se pueden definir como series de potencias. En vez de estudiar directamente estas funciones, es conveniente dar un repaso breve al concepto de serie que usted aprendió en sus cursos de Cálculo.

1.1.1. El concepto de serie

Como usted seguramente recordará, una *serie infinita* es una suma de un número infinito de términos. Las series infinitas aparecen frecuentemente en física y matemáticas y por tal motivo nos interesa entenderlas lo mejor posible. Tal vez la primer pregunta que usted hizo en su curso de Cálculo fué ¿Para que sirven las series? las respuestas a esta pregunta cubren el siguiente espectro:

- Los matemáticos las utilizan como una técnica fundamental para definir y estudiar funciones, por ejemplo la función e^x puede definirse como la serie¹

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}. \quad (1.1)$$

- Se pueden utilizar para calcular los valores de constantes trascendentes, como por ejemplo, el número e

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}, \quad (1.2)$$

y para calcular valores trascendentes, como por ejemplo

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{1}{k}. \quad (1.3)$$

- En su curso de Mecánica Clásica aparecieron por ejemplo cuando se analizó el problema del periodo de un péndulo simple, en lo que usted definió como integrales elípticas

$$\begin{aligned} T &= 4\sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{1 - m \sin^2 \theta}} d\theta \\ &= \sqrt{\frac{l}{g}} 2\pi \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 m + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 m^2 + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 m^3 + \cdots \right], \end{aligned} \quad (1.4)$$

donde $m = \sin^2 \theta_M$, con θ_M la amplitud máxima, l es la longitud del péndulo y g la aceleración debida a la fuerza gravitacional.

Todos los ejemplos que hemos mencionado constituyen ejemplos de series numéricas, es decir, series en donde cada uno de los términos que la componen, son números. Sin embargo existen también series donde los términos que la componen son funciones, esto es, series de funciones. Ejemplos que usted a estudiado en sus cursos de Cálculo y Ecuaciones Diferenciales incluyen:

¹Mostraremos de manera detallada en (1.61) que: $0! = 1$.

- Series de Taylor, donde la idea básica es expresar una función como una serie polinomial. En la ec. (1.1) tenemos como ejemplo, la serie de Taylor alrededor del origen, de la función exponencial.
- En sus cursos de Ecuaciones Diferenciales usted utilizó las series como un método de solución. A este método se le conoce como el método de Frobenius y en este curso estudiaremos varios ejemplos de este tipo, más adelante.

Una vez que que hemos recordado en donde nos hemos encontrado a las series, la siguiente pregunta bien puede ser ¿Qué características de las series son las que estudiamos? La respuesta es: su *convergencia*. Pero ¿Qué significa que una serie converja? La técnica usual para definir de manera precisa el concepto de convergencia es el de *sumas parciales*.

Definición 1.1.1 Si tenemos una secuencia finita de términos $u_0, u_1, u_2, u_3, \dots, u_n$, definimos la n -ésima suma parcial S_n como

$$S_n = \sum_{k=0}^n u_k. \quad (1.5)$$

Como esta serie es una suma finita, siempre converge y no representa dificultades. Si las sumas parciales S_n convergen a un límite finito S , cuando $n \rightarrow \infty$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S, \quad (1.6)$$

decimos entonces que la serie converge y tiene el valor S .

Note que una condición *necesaria* pero *no suficiente* para que la serie converja, es que los términos u_k satisfagan

$$\lim_{k \rightarrow \infty} u_k = 0. \quad (1.7)$$

Ejemplo 1.1.2 En este ejemplo deseamos aplicar la condición anterior para investigar si la siguiente serie converge o no converge

$$\sum_{k=1}^{\infty} k = 1 + 2 + 3 + \dots \quad (1.8)$$

Para ello nos fijaremos en la suma parcial, $S_n = 1 + 2 + 3 + \dots + (n-1) + n$. Una forma de obtener el resultado de esta suma parcial es sumando dos veces S_n término a término, pero con una de las series en orden inverso

$$\begin{array}{rcccccccc} S_n & = & 1 & + & 2 & + & 3 & + & \dots & + & (n-1) & + & n \\ + S_n & = & n & + & (n-1) & + & (n-2) & + & \dots & + & 2 & + & 1 \\ \hline 2S_n & = & (n+1) & + & (n+1) & + & (n+1) & + & \dots & + & (n+1) & + & (n+1) \end{array}$$

Como existen n términos se sigue que

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2}. \quad (1.9)$$

La condición necesaria en este caso no se satisface, ya que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1)}{2} \rightarrow \infty. \quad (1.10)$$

Como la secuencia de series parciales diverge concluimos que la serie infinita diverge.

Ejemplo 1.1.3 La serie geométrica se define como

$$\sum_{k=0}^{\infty} ar^k = a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots \quad (1.11)$$

donde $a = \text{cte.}$ y $r > 0$. Nuevamente deseamos investigar el valor límite de la suma parcial, $S_n = a + ar + \dots + ar^{n-1} + ar^n$.

Una manera de obtener el valor de la suma parcial es haciendo la resta, $S_n - rS_n$,

$$S_n - rS_n = a + ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1} + ar^n - r(a + ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1} + ar^n) = a - ar^{n+1}.$$

de lo cual se sigue que

$$S_n(1-r) = a(1-r^{n+1}) \Rightarrow S_n = a \frac{1-r^{n+1}}{1-r}. \quad (1.12)$$

Note que este cociente sólo es válido si, $r \neq 1$. Tomando el límite $n \rightarrow \infty$, obtenemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{a}{1-r} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{ar^{n+1}}{1-r}, \quad \text{pero} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} r^{n+1} = \begin{cases} 0 & \text{si } r < 1, \\ \infty & \text{si } r > 1, \end{cases} \quad (1.13)$$

con lo cual

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \sum_{k=0}^{\infty} ar^k = \begin{cases} \frac{a}{1-r} & \text{si } r < 1 \text{ y la serie infinita ¡converge!} \\ +\infty & \text{si } r > 1 \text{ y la serie infinita ¡diverge!} \end{cases} \quad (1.14)$$

¿Qué podemos decir si $r = 1$?

1.1.2. Criterios de convergencia

Hasta ahora hemos mencionado una condición necesaria para saber si una serie converge y hemos enfatizado el hecho de que la condición no es suficiente ¿Qué significa que la condición no sea suficiente? Significa que existen series para las cuales las sumas parciales S_n satisfacen la condición (1.7), pero que aún así no convergen. La pregunta natural

ahora es ¿Cómo sabemos entonces si una serie converge? Existen varios criterios que nos permiten obtener la respuesta. A manera de recordatorio de lo que usted aprendió en sus cursos de Cálculo, mencionaremos sólo tres criterios, *el criterio de comparación, el criterio del cociente de D’Alambert y el criterio de Leibnitz*. Una lista más completa de los diferentes criterios de convergencia (criterio de la raíz, el criterio integral de Cauchy Maclaurin, criterio de Kummer, criterio de Raabe, criterio de Gauss, etc.) puede consultarse por ejemplo en [2].

Definición 1.1.4 *Criterio de comparación.*

Si los términos $a_k \geq 0$ forman una serie convergente, $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = S$, y término a término, una segunda serie de términos u_k satisface $u_k \leq a_k$, entonces la serie $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$, también converge. De manera análoga, si los términos $b_k \geq 0$ forman una serie divergente, $\sum_{k=0}^{\infty} b_k \rightarrow \infty$, y término a término, una segunda serie de términos v_k satisface $v_k \geq b_k$, entonces la serie $\sum_{k=0}^{\infty} v_k$ también diverge.

¿Qué pasa si comparamos v_k con a_k o u_k con b_k ?

Ejemplo 1.1.5 *Apliquemos este criterio a la serie armónica definida por*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots \quad (1.15)$$

Note que $\lim_{k \rightarrow \infty} u_k = \lim_{k \rightarrow \infty} 1/k \rightarrow 0$, por lo que la serie armónica satisface la condición (1.7). Sin embargo hemos enfatizado que esta condición es necesaria pero no es una condición suficiente para decidir si la serie converge o no, y por tanto debemos trabajar un poco más para decidir sobre la convergencia de la serie. Reagrupando términos tenemos

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)}_{2 \text{ términos}} + \underbrace{\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right)}_{4 \text{ términos}} + \underbrace{\left(\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \cdots + \frac{1}{15} + \frac{1}{16}\right)}_{8 \text{ términos}} + \cdots$$

Note que cada uno de los grupos de términos entre paréntesis, es de la forma

$$\frac{1}{p+1} + \frac{1}{p+2} + \cdots + \frac{1}{p+p} > \frac{1}{p+p} + \frac{1}{p+p} + \cdots + \frac{1}{p+p} = \frac{p}{2p} = \frac{1}{2}.$$

Tenemos entonces que las sumas parciales S_n que involucran grupos completos de términos entre paréntesis son

$$\begin{aligned} S_1 &= 1 = \frac{2}{2}, & S_2 &= 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}, & S_4 &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{4}{2}, \\ S_8 &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) > \frac{5}{2}, & S_{16} &> \frac{6}{2}, \quad \cdots, & S_{2^n} &\geq \frac{n+2}{2}. \end{aligned}$$

Formalmente podemos definir una serie, para la cual cada suma parcial S' coincida con la 2^n -ésima suma parcial de la serie armónica

$$S'_n \equiv S_{2^n}. \quad (1.16)$$

Utilizando el criterio de comparación, tenemos que para cada suma parcial de esta nueva serie

$$S'_n \geq \frac{n+2}{2}. \quad (1.17)$$

Concluimos entonces que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S'_n > \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{2} \rightarrow \infty \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \rightarrow \infty, \quad \therefore \text{ la serie } \textit{diverge!} \quad (1.18)$$

Ejemplo 1.1.6 Constante de Euler-Mascheroni

La constante de Euler-Mascheroni se define como

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n+1) \right]. \quad (1.19)$$

Esta constante la utilizaremos más adelante para definir la función gama, sin embargo no calcularemos su valor. En vez de ello mostremos que la serie converge, utilizando el criterio de comparación. Note que es posible acotar la serie de la manera siguiente. Si $t > 0$, entonces

$$k(k+t) > k^2 \Rightarrow \frac{1}{k(k+t)} < \frac{1}{k^2} \Rightarrow u_k \equiv \int_0^1 \frac{t}{k(k+t)} dt < \int_0^1 \frac{t}{k^2} dt = \frac{1}{2k^2}.$$

Utilizando fracciones parciales podemos evaluar explícitamente la integral para u_k

$$u_k \equiv \int_0^1 \frac{t}{k(k+t)} dt = \int_0^1 \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+t} \right) dt = \frac{1}{k} - \int_0^1 \frac{1}{1 + \frac{t}{k}} d\left(\frac{t}{k}\right) = \frac{1}{k} - \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right).$$

Combinando ambas ecuaciones tenemos que para todo k

$$\frac{1}{k} - \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) < \frac{1}{2k^2},$$

y utilizando el criterio de comparación 1.1.4, podemos entonces acotar el valor de la n -ésima suma parcial

$$\sum_{k=1}^n u_k = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \ln(k+1) + \ln k \right) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n+1) < \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}.$$

Tomando el límite $n \rightarrow \infty$ obtenemos finalmente

$$\gamma \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n+1) < \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{12},$$

ya que $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$, como mostraremos en el ejemplo 2.1.5.

Definición 1.1.7 *Criterio del cociente de D'Alambert.*

Dados los términos $u_k > 0$ de la serie, calcule el cociente u_{k+1}/u_k ,

$$\text{Si, } \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{u_{k+1}}{u_k} \begin{cases} < 1 \\ > 1 \\ = 1 \end{cases} \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} u_k \begin{cases} \text{converge} \\ \text{diverge} \\ \text{no podemos decidir} \end{cases} \quad (1.20)$$

Ejemplo 1.1.8 *Apliquemos el criterio del cociente a la serie armónica (1.15).*

Calculando el cociente entre dos términos sucesivos de la serie armónica tenemos

$$\frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{\frac{1}{k+1}}{\frac{1}{k}} = \frac{k}{k+1} \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{u_{k+1}}{u_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{k+1} = 1. \quad (1.21)$$

Por tanto no podemos decidir si la serie converge o no, utilizando este criterio.

Ejemplo 1.1.9 *Como un segundo ejemplo de la aplicación del criterio del cociente de D'Alambert, estudiemos nuevamente la convergencia de la serie geométrica (1.11).*

En el ejemplo 1.1.3 hemos mostrado que la serie geométrica

$$\sum_{k=0}^{\infty} ar^k = a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots \quad (1.22)$$

converge si $r < 1$ y diverge si $r \geq 1$ ². Veamos que nos dice el criterio del cociente respecto de la convergencia.

$$\frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{ar^{k+1}}{ar^k} = r \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{u_{k+1}}{u_k} = r \Rightarrow \begin{cases} \text{si } r < 1, \text{ la serie } \textit{converge!} \\ \text{si } r > 1, \text{ la serie } \textit{diverge!} \\ \text{si } r = 1, \text{ no podemos decidir.} \end{cases} \quad (1.23)$$

Estas conclusiones coinciden con las conclusiones obtenidas en el ejemplo 1.1.3, desde luego con la excepción del caso $r = 1$. Enfatizamos nuevamente que el criterio de D'Alambert sólo nos da información sobre el hecho de si la serie converge o no converge, pero no nos dice como calcular el valor de la serie en el caso que ésta converja.

Los dos criterios anteriores están limitados a series de términos positivos. Sin embargo también existen series infinitas en las cuales los signos se alternan. La cancelación parcial debido a los signos alternantes hace la convergencia mucho más rápida y más fácil de identificar. Una condición general para la convergencia de una serie alternante la encontramos en el siguiente criterio.

Definición 1.1.10 *Criterio de Leibnitz.*

Considere la serie $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} u_k$, con $u_k > 0$. Si los términos u_k decrecen monótonamente (para k suficientemente grande) y $\lim_{k \rightarrow \infty} u_k = 0$, entonces la serie converge.

²En realidad no lo mostramos para $r = 1$, pero usted debió haber deducido el resultado fácilmente.

Ejemplo 1.1.11 *De acuerdo con este criterio, la serie armónica alternante*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} - \cdots, \quad (1.24)$$

converge, ya que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} u_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \rightarrow 0.$$

De hecho esta serie converge al valor $\ln 2$ (compárela con la ecuación (1.3)).

Note que el criterio de Leibnitz sólo nos da información sobre la convergencia de la serie, pero al igual que los criterios anteriores, no nos dice como calcular el valor de la serie si ésta converge.

1.1.3. Series de funciones

Es posible generalizar el concepto de series infinitas para incluir la posibilidad de que cada término u_k pueda ser función de alguna variable x , $u_k \rightarrow u_k(x)$. Las sumas parciales son ahora también funciones de la variable x

$$S_n(x) = u_0(x) + u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x), \quad (1.25)$$

y la serie infinita que definimos como el límite de las sumas parciales, también es una función

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(x). \quad (1.26)$$

El concepto importante de convergencia es ahora el de convergencia uniforme.

Definición 1.1.12 *Convergencia uniforme.*

Si $\forall \varepsilon > 0$, \exists un número N independiente de x en el intervalo $[a, b]$ tal que

$$|S(x) - S_n(x)| < \varepsilon, \quad \forall n \geq N,$$

se dice que la serie es uniformemente convergente en el intervalo $[a, b]$.

Dicho de otra manera, para que una serie sea uniformemente convergente, debe ser posible encontrar un número finito N de manera tal que la “cola” infinita de la serie $|\sum_{i=N+1}^{\infty} u_i(x)|$, sea menor que un número ε arbitrariamente pequeño, $\forall x$ en el intervalo dado. En la figura 1.1 se muestra de manera gráfica el concepto de convergencia uniforme.

Series de Taylor

Los primeros ejemplos de series de funciones que usted estudió en sus cursos de Cálculo son las series de Taylor. Estas series son un desarrollo de una función en una serie infinita o en una serie finita más un residuo. Los coeficientes de los términos sucesivos de la serie involucran las derivadas sucesivas de la función.

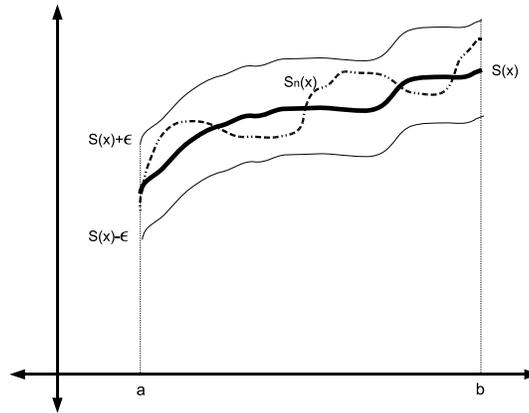


Figura 1.1: Se muestra la gráfica de la función $S(x)$ en el intervalo $[a, b]$ (línea gruesa continua). También se muestran las gráficas de $S(x) - \epsilon$ y $S(x) + \epsilon$ (líneas delgadas continuas). La línea punteada corresponde a una suma parcial $S_n(x)$, con $n \geq N$. Note que la gráfica de $S_n(x)$ cae dentro de la banda crada por las curvas $S(x) - \epsilon$ y $S(x) + \epsilon$, en todo el intervalo $[a, b]$.

Definición 1.1.13 Si tenemos una función $f(x)$ cuya k -ésima derivada $\frac{d^k f(x)}{dx^k}$ es continua en el intervalo: $a \leq x \leq b$, entonces

$$f(x) = f(a) + \frac{df(x)}{dx} \Big|_{x=a} (x-a) + \frac{1}{2!} \frac{d^2 f(x)}{dx^2} \Big|_{x=a} (x-a)^2 + \dots \\ \dots + \frac{1}{(k-1)!} \frac{d^{(k-1)} f(x)}{dx^{k-1}} \Big|_{x=a} (x-a)^{k-1} + R_k \quad (1.27)$$

donde el residuo $R_k = \frac{1}{k!} \frac{d^k f(x)}{dx^k} (x-a)^k$.

Con esta expresión de la serie de Taylor no nos preocupamos por el problema de la convergencia de la serie infinita. La serie es finita y sólo nos preocupamos por la magnitud del residuo.

Definición 1.1.14 Cuando la función $f(x)$ es tal que $\lim_{k \rightarrow \infty} R_k = 0$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{d^k f(x)}{dx^k} \Big|_{x=a} (x-a)^k. \quad (1.28)$$

Cuando el desarrollo se hace alrededor del origen, $a = 0$, y la serie se conoce como la serie de Maclaurin $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \frac{d^k f(0)}{dx^k}$.

Ejemplo 1.1.15 Desarrollemos la función $f(x) = \ln(1+x)$ en serie de Taylor alrededor del origen. Derivando obtenemos

$$\left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=0} = \left. \frac{1}{1+x} \right|_{x=0} = 1, \quad \left. \frac{d^2f(x)}{dx^2} \right|_{x=0} = \left. -\frac{1}{(1+x)^2} \right|_{x=0} = -1,$$

y en general para el término k -ésimo

$$\left. \frac{d^k f(x)}{dx^k} \right|_{x=0} = (-1)^{k-1} \frac{(k-1)!}{(1+x)^k} \Big|_{x=0} = (-1)^{k-1} (k-1)!.$$

Como $f(x=0) = \ln 1 = 0$, la serie de Taylor es

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + R_k, \quad (1.29)$$

donde el residuo es

$$R_k = \frac{x^k}{k!} (-1)^{k-1} (k-1)! = \frac{x^k}{k} (-1)^{k-1} \leq \frac{x^k}{k}, \quad \text{para } 0 \leq x < 1. \quad (1.30)$$

Como $\lim_{k \rightarrow \infty} R_k \rightarrow 0$, entonces

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k. \quad (1.31)$$

En la figura 1.2 se muestra la gráfica de la función $\ln(x)$ y las gráficas de las primeras cuatro sumas parciales, para ilustrar de manera gráfica esta serie de Taylor (ec. 1.31). Es importante notar como a medida que se consideran más términos en la suma parcial, las gráficas de $S_n(x)$ se parecen cada vez más a la gráfica del $\ln(x)$.

En particular si evaluamos la serie de funciones (1.31) en el punto $x = 1$, obtenemos la serie numérica (1.3), que vimos como un ejemplo de serie alternate en el ejemplo 1.1.11.

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots$$

Serie de Potencias

Un ejemplo adicional de series de funciones, es el desarrollo de una función en serie de potencias de la variable

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k. \quad (1.32)$$

Ejemplos del uso de esta serie para resolver ecuaciones diferenciales serán estudiados ampliamente en el curso. Este método se conoce como el método de Frobenius.

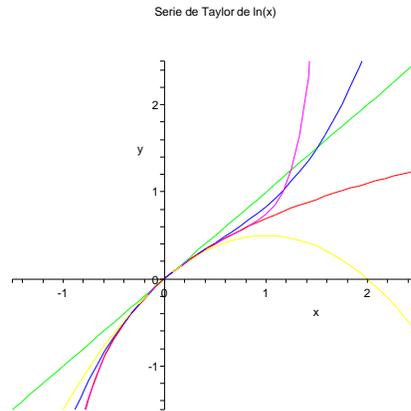


Figura 1.2: Se muestra la gráfica de la función $\ln(1+x)$ en el intervalo $[-1.5, 2.5]$ (línea roja). También se muestran las gráficas de 4 diferentes sumas parciales, S_1 , S_2 , S_3 y S_9 . Note que mientras más términos se consideren en las sumas parciales, la gráfica de $S_n(x)$ se aproxima mejor a la función $\ln(1+x)$.

1.2. Clase 2

En algunas de las fórmulas que introduciremos en las clases siguientes utilizaremos expresiones que involucran a la función factorial $n!$ de un número n . En el caso en que $n \in \mathbb{N}$ conocemos bien esta función y sabemos que está bien definida, pero en muchos casos estaremos interesados en generalizar la función a números que no pertenecen al campo de los naturales. De hecho nos gustaría generalizar la función factorial al campo de los números complejos. La generalización apropiada de la función factorial es la función gama, por este motivo dedicaremos dos clases a su estudio.

1.2.1. Función gama

La función gama aparece ocasionalmente en problemas de física tales como :

- Cálculo de probabilidades en mecánica estadística.
- La normalización de las funciones de onda para el potencial de Coulomb en Mecánica Cuántica.

En realidad la función gama tiene pocas aplicaciones directas en física, sin embargo es importante porque nos permite desarrollar otras funciones que si tienen una aplicación directa en física, como por ejemplo, las funciones de Bessel, cuyo estudio será uno de nuestros objetivos en la próxima parte del curso. Más aún, se puede demostrar que la fun-

ción gama pertenece a una clase general de funciones que no satisfacen ninguna ecuación diferencial con coeficientes racionales.

En la literatura existen varias definiciones equivalentes de la función gama, aquí presentaremos tres definiciones diferentes, establecidas por diferentes matemáticos y que son las que se encuentran de manera más común en la literatura. Cada una de estas definiciones muestra y enfatiza diferentes características y propiedades de la función gama. Desde luego será necesario mostrar que estas definiciones son en realidad equivalentes, lo cual haremos. Utilizaremos la notación $\Gamma(z)$ introducida por el matemático Francés Adrien-Marie Legendre (1752-1833), para denotar a la función gama con $z \in \mathbb{C}$.

Definición 1.2.1 *Integral definida (debida a Euler).*

$$\Gamma(z) \equiv \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt, \quad \operatorname{Re}(z) > 0. \quad (1.33)$$

Esta integral tiene sentido si y sólo si converge. Para que converja se debe satisfacer la restricción $\operatorname{Re}(z) > 0$ ³.

Definición 1.2.2 *Límite infinito (debida a Gauss y a Euler).*

Definimos la función gama como el siguiente límite infinito

$$\Gamma(z) \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n}{z(z+1)(z+2) \cdots (z+n)} n^z, \quad z \neq 0, -1, -2, \dots \quad (1.34)$$

Esta definición implica que si el límite existe, $\Gamma(z)$ está definida $\forall z$, excepto posiblemente en los enteros no positivos y en cero.

Definición 1.2.3 *Producto infinito (debida a Weierstrass).*

El inverso de la función gama está dado por el producto infinito

$$\frac{1}{\Gamma(z)} \equiv z e^{\gamma z} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-z/n}, \quad (1.35)$$

donde γ es la constante de Euler-Mascheroni, definida por

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n+1) \right], \quad (1.36)$$

³¿De donde sale la condición? Note que la función e^{-t} en el integrando de (1.33) asegura que la integral converge cuando $t \rightarrow \infty$, ya que la exponencial domina sobre cualquier potencia en ese régimen. En el caso en que $t \rightarrow 0$, el integrando diverge debido al factor t^{z-1} , a menos que $\operatorname{Re}(z) > 0$. Esto es claro si recordamos que

$$\int t^{z-1} dt = \frac{t^z}{z} \quad \text{para } \operatorname{Re}(z) > 0, \quad \text{y} \quad \int t^{z-1} dt = \ln t \quad \text{para } \operatorname{Re}(z) = 0,$$

y que el $\ln t$ diverge para $t \rightarrow 0$.

y cuyo valor numérico a 50 decimales es

$$\gamma \approx 0,57721566490153286060651209008240243104215933593992 \dots \quad (1.37)$$

Recuerde que en el ejemplo 1.1.6, hemos mostrado utilizando el criterio de comparación que la serie (1.36) converge.

Antes de mostrar la equivalencia entre las diferentes definiciones de la función gama, deseamos resaltar dos propiedades muy importantes de la función:

Propiedad 1.2.4 *Relación funcional básica.*

$\Gamma(z)$ *satisface la siguiente relación funcional*

$$\Gamma(z + 1) = z\Gamma(z). \quad (1.38)$$

Propiedad 1.2.5 *Polos de la función gama.*

$\Gamma(z)$ *tiene polos simples en $z = 0, -1, -2, -3, \dots$*

Comencemos verificando la propiedad 1.2.4, a partir de la definición 1.2.1. Integrando por partes la función gama tenemos

$$\begin{aligned} \Gamma(z) &= \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt = \int_0^{\infty} [-d(e^{-t} t^{z-1}) + (z-1)e^{-t} t^{z-2} dt] \\ &= -e^{-t} t^{z-1} \Big|_0^{\infty} + (z-1) \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-2} dt = (z-1) \int_0^{\infty} e^{-t} t^{(z-1)-1} dt \\ &= (z-1)\Gamma(z-1). \end{aligned}$$

Haciendo el cambio de variable $z \rightarrow z + 1$, obtenemos la ecuación (1.38).

Esta propiedad también la podemos obtener fácilmente de la definición 1.2.2. Note que si reemplazamos la variable $z \rightarrow z + 1$ en la definición, entonces

$$\begin{aligned} \Gamma(z + 1) &\equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n}{(z + 1)(z + 2)(z + 3) \cdots (z + n + 1)} n^{z+1} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{nz}{z + n + 1} \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n}{z(z + 1)(z + 2) \cdots (z + n)} n^z \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nz}{z + n + 1} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n}{z(z + 1)(z + 2) \cdots (z + n)} n^z = z\Gamma(z). \end{aligned}$$

Obteniendo nuevamente la relación (1.38). También es posible mostrar la relación (1.38) a partir de la definición 1.2.3. Esto lo dejamos como ejercicio al lector.

De las definiciones 1.2.2 y 1.2.3 podemos notar inmediatamente que, como una función de la variable compleja z , $\Gamma(z)$ tiene polos simples en $z = 0, -1, -2, \dots$. Este

hecho también se puede observar de la definición 1.2.1, si utilizamos la descomposición de Prym. Reescribiendo (1.33) como

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt = \int_0^1 e^{-t} t^{z-1} dt + \int_1^\infty e^{-t} t^{z-1} dt.$$

El último término del lado derecho de esta ecuación, está bien definido para todos los valores de z . Mientras que para el primer término tenemos

$$\int_0^1 e^{-t} t^{z-1} dt = \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-t)^n}{n!} t^{z-1} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^1 t^{n+z-1} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+z)}.$$

Tenemos así que

$$\Gamma(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+z)} + \int_1^\infty e^{-t} t^{z-1} dt, \quad (1.39)$$

el cual es conocido como el desarrollo de Mittag-Leffler de la función $\Gamma(z)$.

Del primer término en el desarrollo (1.39), notamos nuevamente que $\Gamma(z)$ tiene polos simples para todos los enteros no-positivos y para el cero. Más aún, podemos obtener el residuo de estos polos calculando

$$\lim_{z \rightarrow -n} (z+n)\Gamma(z) = \frac{(-1)^n}{n!}. \quad (1.40)$$

Teorema 1.2.6 *Las definiciones 1.2.1, 1.2.2 y 1.2.3 son equivalentes.*

Mostremos la validez de este teorema. Para ello comencemos mostrando que la definición 1.2.1, implica la definición 1.2.2. Consideremos la función de dos variables

$$F(z, n) = \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{z-1} dt. \quad (1.41)$$

Dado que $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \equiv e^{-t}$ (definición de la función exponencial), esta función se reduce en el límite $n \rightarrow \infty$, a la definición 1.2.1 de la función gama

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F(z, n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{z-1} dt = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt = \Gamma(z). \quad (1.42)$$

Si ahora, antes de tomar el límite integramos por partes la función $F(z, n)$, n -veces de manera sucesiva, obtendremos un resultado diferente pero equivalente. La idea es que este procedimiento nos reproduzca la definición 1.2.2 de la función gama. Para ello realicemos primeramente el cambio de variables $u = t/n \Rightarrow dt = ndu$

$$F(z, n) = \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{z-1} dt = \int_0^1 (1-u)^n (nu)^{z-1} n du = n^z \int_0^1 (1-u)^n u^{z-1} du.$$

Integrando por partes una vez, tenemos

$$\begin{aligned}\frac{F(z, n)}{n^z} &= \int_0^1 \left[d \left((1-u)^n \frac{u^z}{z} \right) + n(1-u)^{n-1} \frac{u^z}{z} du \right] \\ &= (1-u)^n \frac{u^z}{z} \Big|_0^1 + \frac{n}{z} \int_0^1 (1-u)^{n-1} u^z du = \frac{n}{z} \int_0^1 (1-u)^{n-1} u^z du.\end{aligned}$$

Integrando por partes una vez más

$$\begin{aligned}\frac{F(z, n)}{n^z} &= \frac{n}{z} \int_0^1 \left[d \left((1-u)^{n-1} \frac{u^{z+1}}{z+1} \right) + (n-1)(1-u)^{n-2} \frac{u^{z+1}}{z+1} du \right] \\ &= \frac{n}{z} \left[(1-u)^{n-1} \frac{u^{z+1}}{z+1} \Big|_0^1 + \frac{n-1}{z+1} \int_0^1 (1-u)^{n-2} u^{z+1} du \right] \\ &= \frac{n}{z} \cdot \frac{n-1}{z+1} \int_0^1 (1-u)^{n-2} u^{z+1} du.\end{aligned}$$

E integrando por partes n -veces obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{F(z, n)}{n^z} &= \frac{n(n-1)(n-2)\cdots 2 \cdot 1}{z(z+1)(z+2)\cdots(z+n-1)} \int_0^1 u^{z+n-1} du \\ &= \frac{n(n-1)(n-2)\cdots 2 \cdot 1}{z(z+1)(z+2)\cdots(z+n-1)} \frac{u^{z+n}}{z+n} \Big|_0^1 = \frac{1 \cdot 2 \cdots n}{z(z+1)\cdots(z+n)}.\end{aligned}$$

Así, tomando el límite $n \rightarrow \infty$, obtenemos finalmente

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F(z, n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot 2 \cdots n}{z(z+1)\cdots(z+n)} n^z = \Gamma(z),$$

que es la definición 1.2.2.

Mostremos ahora que la definición 1.2.2 implica la definición 1.2.3.

$$\Gamma(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n}{z(z+1)(z+2)\cdots(z+n)} n^z = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{z+1} \cdot \frac{2}{z+2} \cdots \frac{n}{z+n} n^z.$$

En este producto tenemos n términos de la forma $\frac{m}{z+m} = \frac{1}{1+\frac{z}{m}} = (1+\frac{z}{m})^{-1}$, por lo que podemos reescribir la función gama como

$$\Gamma(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{z} \prod_{m=1}^n \left(1 + \frac{z}{m}\right)^{-1} n^z = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{z} \prod_{m=1}^n \left(1 + \frac{z}{m}\right)^{-1} e^{z \ln n}.$$

Multiplicando y dividiendo esta ecuación por

$$e^{(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n})z} = e^z e^{\frac{z}{2}} \cdots e^{\frac{z}{n}} = \prod_{m=1}^n e^{z/m},$$

obtenemos

$$\Gamma(z) = \frac{1}{z} \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n})z} e^{z \ln n} \prod_{m=1}^n \left(1 + \frac{z}{m}\right)^{-1} e^{z/m},$$

con lo cual, la inversa de la función gama es

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = z \lim_{n \rightarrow \infty} e^{(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n}-\ln n)z} \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{m=1}^n \left(1 + \frac{z}{m}\right) e^{-z/m} \right].$$

Pero como vimos en (1.36), la serie

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n \right),$$

es la constante de Euler-Mascheroni. Obtenemos así finalmente

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = ze^{\gamma z} \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{m=1}^n \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-z/m} \right], \quad (1.43)$$

que es la definición 1.2.3 de la función gama.

Una vez que nos hemos convencido de la equivalencia entre las tres definiciones que hemos presentado de la función gama, calculemos algunos valores de esta función.

De la definición 1.2.1 podemos calcular directamente el valor de $\Gamma(1/2)$ y $\Gamma(1)$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{\frac{1}{2}-1} dt = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{-\frac{1}{2}} dt = 2 \int_0^{\infty} e^{-r^2} dr = \sqrt{\pi}, \quad (1.44)$$

donde en la penúltima integral hemos hecho el cambio de variable $t = r^2 \Rightarrow dt = 2r dr$.

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{1-1} dt = \int_0^{\infty} e^{-t} dt = -e^{-t} \Big|_0^{\infty} = 1. \quad (1.45)$$

De estos valores y de la propiedad 1.2.4, podemos calcular el valor de la función gama para todos los números naturales y semienteros positivos⁴. Para $z \in \mathbb{N}$ tenemos

$$\begin{aligned} \Gamma(z+1) &= z\Gamma(z), \\ \Gamma(2) = \Gamma(1+1) &= \Gamma(1) = 1, \\ \Gamma(3) = \Gamma(2+1) &= 2\Gamma(2) = 2 \cdot 1 = 2!, \\ \Gamma(4) = \Gamma(3+1) &= 3\Gamma(3) = 3 \cdot 2! = 3!, \\ &\vdots = \vdots \\ \Gamma(n) = \Gamma(n-1+1) &= (n-1)\Gamma(n-1) = (n-1) \cdot (n-2)! = (n-1)! \end{aligned} \quad (1.46)$$

⁴A menos que se establezca lo contrario, cuando nos referimos a los números semienteros, nos referimos a números de la forma: $\frac{2n+1}{2}$ con $n \in \mathbb{Z}$. Esto es, $\dots, -\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots$

Mientras que para los números semienteros positivos

$$\begin{aligned} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) &= \Gamma\left(\frac{1}{2} + 1\right) = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \\ \Gamma\left(\frac{5}{2}\right) &= \Gamma\left(\frac{3}{2} + 1\right) = \frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3\sqrt{\pi}}{4}, \\ &\vdots = \vdots \\ \Gamma\left(\frac{2n+1}{2}\right) &= \Gamma\left(\frac{2n-1}{2} + 1\right) = \frac{2n-1}{2} \cdot \frac{2n-3}{2} \cdots \frac{1}{2}\sqrt{\pi} = \frac{\sqrt{\pi}}{2^n} 1 \cdot 3 \cdots (2n-1), \end{aligned} \quad (1.47)$$

con $n \in \mathbb{N}$ ⁵.

En la figura 1.3 mostramos la gráfica de la función gama según la definición 1.2.1, para $z \in \mathbb{R}^+$. La gráfica incluye todos los valores que hemos calculado para los números naturales naturales y los números semi-enteros positivos.

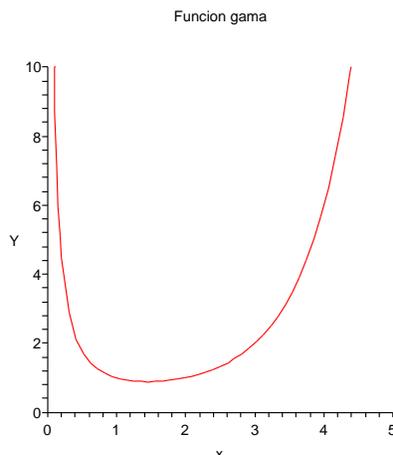


Figura 1.3: Gráfica de la función $\Gamma(z)$ para $z \in \mathbb{R}^+$, de acuerdo con la definición 1.2.1.

Ejemplo 1.2.7 Volúmenes de esferas y bolas en dimensiones arbitrarias.

Cuando trabajamos en espacios cuya dimensión es muy grande, como en teoría de cuerdas⁶ o en mecánica estadística⁷, debemos ser precisos cuando hablamos del volumen de esferas. Primeramente hagamos una distinción entre el concepto de bolas y el de esferas.

⁵No está de más enfatizar que el valor $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$, no se obtiene de esta relación. Sólo obtenemos los valores para $n \in \mathbb{N}$.

⁶La teoría de cuerdas es una teoría que intenta unificar las cuatro interacciones fundamentales que conocemos: la fuerza fuerte, la fuerza débil, la fuerza electromagnética y la fuerza gravitacional. Para que la teoría sea consistente, las cuerdas relativistas deben vivir en espacios-tiempo de 10 dimensiones. La/El lector@ interesad@ en aprender esta teoría a un nivel introductorio, puede consultar [10].

⁷En mecánica estadística se calculan ciertas cantidades en el espacio fase de un sistema de muchas partículas. Recuerde que el espacio fase de una sola partícula es un espacio de 6 dimensiones.

En \mathbb{R}^3 definimos la 3-bola como la región:

$$B^3(R) : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq R^2.$$

Esta región está acotada por la 2-esfera

$$S^2(R) : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = R^2.$$

En general definimos las bolas como los subespacios de \mathbb{R}^d que satisfacen:

$$B^d(R) : x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_d^2 \leq R^2,$$

y que están acotadas por la $(d-1)$ -esfera, denotada por $S^{d-1}(R)$,

$$S^{d-1}(R) : x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_d^2 = R^2.$$

La notación es clara. En $B^d(R)$, d es la dimensión del espacio y R es el radio de la bola. Si escribimos simplemente B^d , supondremos que $R = 1$.

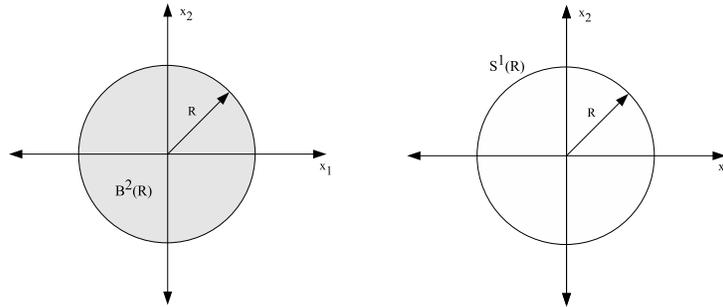


Figura 1.4: $B^2(R)$ es el disco de radio R (objeto 2-dimensional) encerrado por $S^1(R)$ la circunferencia de radio R en \mathbb{R}^2 (objeto 1-dimensional). B^2 es el disco de radio $R = 1$ encerrado por la circunferencia unitaria S^1 .

Terminología: Para evitar confusión, uno siempre habla de volúmenes.

- Si el espacio es de dimensión $d = 1$, volumen = longitud.
- Si el espacio es de dimensión $d = 2$, volumen = área.
- Si el espacio es de dimensión $d = 3$, volumen = volumen, etc.

Los volúmenes de la 1-esfera y de la 2-esfera son

$$\begin{aligned} \text{vol}(S^1(R)) &= 2\pi R, \\ \text{vol}(S^2(R)) &= 4\pi R^2, \\ &\vdots = \vdots \\ \text{vol}(S^{d-1}(R)) &= \text{vol}(S^{d-1})R^{d-1} \end{aligned}$$

donde $\text{vol}(S^{d-1}(R))$ es el volumen de la $(d-1)$ -esfera de radio R . $\text{vol}(S^1) = 2\pi$, $\text{vol}(S^2) = 4\pi$ y $\text{vol}(S^{d-1})$ es el volumen de la $(d-1)$ -esfera unitaria, que deseamos calcular en general.

Así uno de los objetivos de este ejemplo es calcular el volumen de la esfera unitaria S^{d-1} . Consideremos el espacio Euclideo \mathbb{R}^d con coordenadas: x_1, x_2, \dots, x_d . Sea r la coordenada radial $r^2 = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_d^2$. Para calcular el $\text{vol}(S^{d-1})$ haremos uso de la posibilidad de calcular la integral

$$I_d = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-r^2} dx_1 dx_2 \cdots dx_d, \quad (1.48)$$

de dos maneras diferentes, donde una de las dos maneras involucra precisamente el volumen deseado.

Forma 1: Calculemos directamente esta integral como un producto de integrales gaussianas

$$\begin{aligned} I_d &= \int_{\mathbb{R}^d} e^{-r^2} dx_1 dx_2 \cdots dx_d = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_d^2)} dx_1 dx_2 \cdots dx_d \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x_1^2} dx_1 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x_2^2} dx_2 \cdots \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x_d^2} dx_d = \prod_{i=1}^d \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x_i^2} dx_i = \prod_{i=1}^d \sqrt{\pi} = \pi^{d/2}. \end{aligned}$$

Dado que la integral gaussiana unidimensional es $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x_i^2} dx_i = \sqrt{\pi}$. Hasta aquí no hemos involucrado el volumen que deseamos calcular.

Forma 2: Calculemos nuevamente la integral (1.48) pero esta vez introduciendo explícitamente el volumen de la $(d-1)$ -esfera. Esto se logra haciendo la integral en coordenadas esféricas. Si hacemos una foliación⁸ de \mathbb{R}^d en cáscaras esféricas de radio r , esto es, en superficies $S^{d-1}(r)$, el volumen comprendido entre $S^{d-1}(r+dr)$ y $S^{d-1}(r)$ es: $\text{vol}(S^{d-1}(r))dr$, así

$$I_d = \int_0^{\infty} e^{-r^2} \text{vol}(S^{d-1}(r)) dr.$$

Pero el $\text{vol}(S^{d-1}(r)) = r^{d-1} \text{vol}(S^{d-1})$, con lo cual la integral queda escrita en la forma

$$I_d = \text{vol}(S^{d-1}) \int_0^{\infty} e^{-r^2} r^{d-1} dr.$$

⁸Intuitivamente una foliación es un conjunto de cortes del espacio original en piezas de dimensión menor. Por ejemplo se puede foliar el espacio euclideo tridimensional (\mathbb{R}^3) considerándolo como un apilamiento de planos euclídeos infinitos (\mathbb{R}^2) uno encima de otro. Para nuestro problema piense por ejemplo en una cebolla. La cebolla es un objeto de tres dimensiones y piense en las capas de cebolla que la forman. Si el grueso de estas capas fuera muy pequeño, podríamos considerar que estas capas son objetos de dos dimensiones. En un lenguaje más formal diríamos que la cebolla descrita por $B^3(R)$ se folia en capas descritas por $S^2(r)$, donde el radio de cada una de las capas satisface la desigualdad $r \leq R$. De manera análoga, podemos foliar el espacio euclideo \mathbb{R}^d en esferas $S^{d-1}(r)$, con $r \in [0, \infty)$. En este caso estamos considerando que $\mathbb{R}^d = B^d(R \rightarrow \infty)$. Esto es justamente lo que usted hace en el caso de \mathbb{R}^2 e integra en coordenadas polares.

Realizando el cambio de variable: $t = r^2 \Rightarrow dr = t^{-1/2} dt/2$,

$$\begin{aligned} I_d &= \text{vol}(S^{d-1}) \int_0^\infty e^{-t} t^{(d-1)/2} t^{-1/2} \frac{dt}{2} = \frac{1}{2} \text{vol}(S^{d-1}) \int_0^\infty t^{\frac{d}{2}-1} e^{-t} dt \\ &= \frac{1}{2} \text{vol}(S^{d-1}) \Gamma\left(\frac{d}{2}\right). \end{aligned}$$

Tenemos así dos resultados diferentes para la integral (1.48), igualandolos obtenemos finalmente

$$\text{vol}(S^{d-1}) = \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)} \quad \Rightarrow \quad \text{vol}(S^{d-1}(R)) = \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)} R^{d-1} \quad (1.49)$$

Veamos que la fórmula obtenida reproduce lo que conocemos

$$\begin{aligned} \text{vol}(S^1) &= \text{vol}(S^{2-1}) = \frac{2\pi^{2/2}}{\Gamma(2/2)} = \frac{2\pi}{1} = 2\pi, \quad \checkmark \\ \text{vol}(S^2) &= \text{vol}(S^{3-1}) = \frac{2\pi^{3/2}}{\Gamma(3/2)} = \frac{2\pi^{3/2}}{\frac{1}{2}\pi^{1/2}} = 4\pi, \quad \checkmark \\ \text{vol}(S^3) &= \text{vol}(S^{4-1}) = \frac{2\pi^{4/2}}{\Gamma(4/2)} = \frac{2\pi^2}{1} = 2\pi^2, \\ \text{vol}(S^4) &= \text{vol}(S^{5-1}) = \frac{2\pi^{5/2}}{\Gamma(5/2)} = \frac{2\pi^{5/2}}{\frac{3}{4}\pi^{1/2}} = \frac{8}{3}\pi^2, \\ &\vdots = \vdots \end{aligned}$$

¿Cuál es el volumen de las bolas $B^d(R)$? Note que en este caso

$$\begin{aligned} \text{vol}(B^2(R)) &= \pi R^2, \\ \text{vol}(B^3(R)) &= \frac{4}{3}\pi R^3, \\ &\vdots = \vdots \\ \text{vol}(B^d(R)) &= R^d \text{vol}(B^d). \end{aligned}$$

Pero

$$\begin{aligned} \text{vol}(B^d) &= \int_0^1 \text{vol}(S^{d-1}(r)) dr = \int_0^1 \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)} r^{d-1} dr = \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)} \frac{r^d}{d} \Big|_0^1 = \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)} \frac{1}{d} \\ &= \frac{\pi^{d/2}}{\Gamma\left(1 + \frac{d}{2}\right)}. \end{aligned}$$

Con lo cual concluimos que

$$\text{vol}(B^d) = \frac{\pi^{d/2}}{\Gamma\left(1 + \frac{d}{2}\right)} \quad \Rightarrow \quad \text{vol}(B^d(R)) = \frac{\pi^{d/2}}{\Gamma\left(1 + \frac{d}{2}\right)} R^d. \quad (1.50)$$

Note que podemos calcular $B^d(R)$ directamente

$$\text{vol}(B^d(R)) = \int_0^R \text{vol}(S^{d-1}(r)) dr = \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)} \frac{r^d}{d} \Big|_0^R = \frac{\pi^{d/2}}{\Gamma(1 + \frac{d}{2})} R^d.$$

Chequemos que la fórmula obtenida reproduce lo que conocemos

$$\begin{aligned} \text{vol}(B^2(R)) &= \frac{\pi^{2/2}}{\Gamma(2)} R^2 = \frac{\pi}{1} R^2 = \pi R^2, \quad \checkmark \\ \text{vol}(B^3(R)) &= \frac{\pi^{3/2}}{\Gamma(5/2)} R^3 = \frac{\pi^{3/2}}{\frac{3}{4}\pi^{1/2}} R^3 = \frac{4}{3}\pi R^3, \quad \checkmark \\ \text{vol}(B^4(R)) &= \frac{\pi^{4/2}}{\Gamma(3)} R^4 = \frac{\pi^2}{2} R^4, \\ &\vdots = \vdots \end{aligned}$$

Ejemplo 1.2.8 Función beta

La función beta se define como

$$\beta(u, v) = \int_0^1 t^{u-1} (1-t)^{v-1} dt. \quad (1.51)$$

Mostremos que esta función se puede escribir en términos de la función gama como

$$\beta(u, v) = \frac{\Gamma(u)\Gamma(v)}{\Gamma(u+v)}. \quad (1.52)$$

Para ello utilicemos la representación integral de Euler de la función gama. Tenemos que

$$\Gamma(u)\Gamma(v) = \int_0^\infty e^{-q} q^{u-1} dt \int_0^\infty e^{-s} s^{v-1} ds, \quad \text{Re}(u) > 0, \text{Re}(v) > 0.$$

Realizando los cambios de variable: $q = x^2 \Rightarrow dq = 2x dx$ en la primer integral, y $s = y^2 \Rightarrow ds = 2y dy$ en la segunda, tenemos

$$\Gamma(u)\Gamma(v) = 4 \int_0^\infty e^{-x^2} x^{2u-1} dx \int_0^\infty e^{-y^2} y^{2v-1} dy = 4 \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)} x^{2u-1} y^{2v-1} dx dy.$$

Realizando esta integral doble en coordenadas polares ($x = \rho \cos \phi$, $y = \rho \sin \phi$), obtenemos

$$\begin{aligned} \Gamma(u)\Gamma(v) &= 4 \int_0^{\pi/2} \int_0^\infty e^{-\rho^2} \rho^{2u-1} \rho^{2v-1} \cos^{2u-1} \phi \sin^{2v-1} \phi \rho d\rho d\phi \\ &= 4 \int_0^\infty e^{-\rho^2} \rho^{2u+2v-1} d\rho \int_0^{\pi/2} \cos^{2u-1} \phi \sin^{2v-1} \phi d\phi. \end{aligned}$$

Realizando finalmente los cambios de variable: $p = \rho^2 \Rightarrow dp = d\rho/(2\rho)$ en la primer integral y $t = \cos^2 \phi \Rightarrow dt = -2 \sin \phi \cos \phi$ en la segunda, obtenemos

$$\Gamma(u)\Gamma(v) = \int_0^\infty e^{-p} p^{u+v-1} dp \int_0^1 t^{u-1} (1-t)^{v-1} dt = \Gamma(u+v)\beta(u,v),$$

de lo cual se sigue directamente la ecuación (1.51).

Ejemplo 1.2.9 Función gama en la Mecánica Clásica

Determine el periodo de oscilación τ en función de la energía, para el movimiento de una partícula de masa m en un campo cuya energía potencial es ⁹

$$U = A|x|^n. \quad (1.53)$$

Para una partícula en este potencial tenemos que la energía del sistema está dada por

$$E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + A|x|^n$$

Como usted aprendió en su curso de Mecánica Clásica, para poder obtener el periodo del movimiento debemos escribir primero la ecuación anterior en términos de la velocidad

$$\dot{x}^2 = \frac{2}{m}(E - A|x|^n) \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}} \sqrt{(E - A|x|^n)},$$

y después separar la parte de la ecuación dependiente del tiempo respecto de la parte dependiente de la posición

$$dt = \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}} \sqrt{(E - A|x|^n)}}.$$

Ahora bien, todos los potenciales de este tipo: $U = A|x|^n$ son funciones pares $U(x) = U(-x)$. Así para calcular el periodo de oscilación, que es igual a 2 veces la amplitud¹⁰, basta con calcular el periodo de 0 a x_0 (donde $|x| = x$) y multiplicarlo por cuatro. El punto de retorno x_0 tiene la propiedad de que la velocidad se anula, esto es

$$\dot{x}_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad E = Ax_0^n \quad \Rightarrow \quad x_0 = \left(\frac{E}{A}\right)^{1/n}.$$

Con lo cual

$$\tau = 4\sqrt{\frac{m}{2}} \int_0^{x_0} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}} \sqrt{(E - Ax^n)}} = 2\sqrt{2m} \int_0^{\left(\frac{E}{A}\right)^{1/n}} \frac{dx/\sqrt{E}}{\sqrt{\left(1 - \frac{A}{E}x^n\right)}}.$$

⁹Es claro que la constante A tiene unidades: $[A] = \frac{ML^2-n}{T^2}$.

¹⁰Le recordamos al lector que la amplitud es la longitud que va de $-x_0$ a x_0 , donde $-x_0$ y x_0 son los puntos de retorno.

Haciendo el cambio de variable $y = \left(\frac{A}{E}\right)^{1/n} x \Rightarrow dx = \left(\frac{E}{A}\right)^{1/n} dy$ con lo cual los límites de integración son ahora $\left(x = 0 \Rightarrow y = 0; x = \left(\frac{E}{A}\right)^{1/n} \Rightarrow y = 1\right)$, obtenemos

$$\tau = 2\sqrt{2m} \int_0^1 \frac{\left(\frac{E}{A}\right)^{1/n} \frac{dy}{\sqrt{E}}}{1 - y^n} = 2\sqrt{\frac{2m}{E}} \left(\frac{E}{A}\right)^{1/n} \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{1 - y^n}}.$$

Sustituyendo ahora $y^n = u$ (ya que $y = u^{1/n} \Rightarrow dy = \frac{1}{n}u^{\frac{1}{n}-1}$), la integral se reduce a una función beta

$$\tau = \frac{2}{n} \sqrt{\frac{2m}{E}} \left(\frac{E}{A}\right)^{1/n} \int_0^1 \frac{u^{\frac{1}{n}-1}}{\sqrt{1-u}} du = \frac{2}{n} \sqrt{\frac{2m}{E}} \left(\frac{E}{A}\right)^{1/n} \beta\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{2}\right).$$

Como vimos en el problema anterior, la función beta se puede expresar mediante funciones gamma

$$\tau = \frac{2}{n} \sqrt{\frac{2m}{E}} \left(\frac{E}{A}\right)^{1/n} \frac{\Gamma(\frac{1}{n})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2} + \frac{1}{n})},$$

y dado que $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ obtenemos finalmente

$$\tau = \frac{2}{n} \sqrt{\frac{2\pi m}{E}} \left(\frac{E}{A}\right)^{1/n} \frac{\Gamma(\frac{1}{n})}{\Gamma(\frac{1}{2} + \frac{1}{n})}. \quad (1.54)$$

Por ejemplo para $n = 1$ (con $A > 0$) tenemos

$$\tau = 2\sqrt{\frac{2\pi m}{E}} \left(\frac{E}{A}\right) \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(\frac{3}{2})} = \frac{4}{A} \sqrt{2mE},$$

mientras que para $n = 2$

$$\tau = \frac{2}{2} \sqrt{\frac{2\pi m}{E}} \left(\frac{E}{A}\right)^{1/2} \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(1)} = \pi \sqrt{\frac{2m}{A}},$$

¡Para un oscilador armónico el periodo no depende de E !

1.3. Clase 3

En la clase anterior hemos definido la función gama de tres formas diferentes pero equivalentes. Más aún, utilizando la definición 1.2.1 hemos calculado los valores de la función para todos los números naturales divididos entre dos: $1/2, 2/2 = 1, 3/2, 4/2 = 2, \dots$, etc. y hemos mostrado la gráfica para el caso en que $z \in \mathbb{R}^+$. Del valor de la función gama para los números naturales (ec. (1.46)), vemos que existe una relación entre la función gama y la función factorial, $\Gamma(n) = (n-1)!$. Comencemos esta clase definiendo la función factorial.

1.3.1. Función factorial

Definimos la función factorial en términos de la función gama como

$$\Gamma(z) \equiv (z - 1)! \quad (1.55)$$

Concentremosnos en la forma de Euler de la función gama, (def. 1.2.1)

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt \equiv (z - 1)! \quad (1.56)$$

Dado que el exponente -1 en la variable t es latoso. Podemos redefinir la integral de manera tal que no aparezca

Definición 1.3.1 *Función factorial.*

Definimos la función factorial $z!$ como

$$\int_0^{\infty} e^{-t} t^z dt \equiv z!, \quad \text{con } \operatorname{Re}(z) > -1, \quad (1.57)$$

Con esta definición es claro que

$$\Gamma(z) = (z - 1)! \quad \text{ó} \quad \Gamma(z + 1) = z! \quad (1.58)$$

Ocasionalmente aún encontraremos la notación de Gauss para la función factorial

$$\prod(z) = 1 \cdot 2 \cdots z = z! \quad (1.59)$$

Por ejemplo, si $z = n$ con $n \in \mathbb{N}$, entonces según el resultado (1.46)

$$\Gamma(n) = (n - 1)! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n - 1), \quad \Rightarrow \quad z! = n! = \Gamma(n + 1) = 1 \cdot 2 \cdots n,$$

que es el factorial usual.

En términos de la función factorial la propiedad 1.2.4 se reescribe como

$$\Gamma(z + 1) = z\Gamma(z) \quad \Rightarrow \quad z! = z(z - 1)! \quad (1.60)$$

De lo cual se sigue inmediatamente que

$$1! = 1(1 - 1)! \quad \Rightarrow \quad 1! = 0! = 1. \quad (1.61)$$

1.3.2. Notación factorial doble

En muchos problemas de la física matemática, por ejemplo en (1.4), (1.47) y como veremos más adelante, en los polinomios de Legendre, encontramos productos que involucran sólo los números pares o sólo los números impares. Por *conveniencia* a estos productos se les denota con un factorial doble

$$1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n + 1) \equiv (2n + 1)!! \quad (1.62)$$

$$2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n \equiv (2n)!! \quad (1.63)$$

Note que estos factoriales dobles se pueden escribir en términos del factorial usual

$$(2n)!! = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n = (2 \cdot 1) \cdot (2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 3) \cdots (2 \cdot n) = 2^n (1 \cdot 2 \cdots n) = 2^n n! \quad (1.64)$$

y

$$\begin{aligned} (2n + 1)!! &= 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n + 1) = 1 \cdot \frac{2}{2} \cdot 3 \cdot \frac{4}{4} \cdot 5 \cdot \frac{6}{6} \cdots \frac{2n}{2n} \cdot (2n + 1) \\ &= \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots 2n \cdot (2n + 1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n} = \frac{(2n + 1)!}{(2n)!!} = \frac{(2n + 1)!}{2^n n!} \end{aligned} \quad (1.65)$$

Ejemplo 1.3.2 Valores de $\Gamma\left(\frac{2n+1}{2}\right)$, con $n \in \mathbb{N}$.

En (1.47) hemos calculado el valor de la función gama para los números semi-enteros positivos, los cuales son de la forma: $\frac{2n+1}{2}$ con $n \in \mathbb{N}$, obteniendo

$$\Gamma\left(\frac{2n + 1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^n} 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n - 1).$$

Podemos reescribir este resultado con ayuda de los factoriales dobles, ya que

$$1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n - 1) = (2n - 1)!! = \frac{(2(n - 1) + 1)!}{2^{n-1}(n - 1)!} = \frac{(2n - 1)!}{2^{n-1}(n - 1)!},$$

con lo cual

$$\Gamma\left(\frac{2n + 1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^n} (2n - 1)!! = \frac{\sqrt{\pi}(2n - 1)!}{2^{2n-1}(n - 1)!}. \quad (1.66)$$

1.3.3. Continuación analítica de la función gama

Note que en la definición 1.2.1 de la función gama

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt, \quad \operatorname{Re}(z) > 0. \quad (1.67)$$

Podemos diferenciar la función $\Gamma(z)$ con respecto a z y las integrales aún convergen

$$\frac{d\Gamma(z)}{dz} \equiv \int_0^\infty e^{-t} \frac{d}{dz} t^{z-1} dt = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} \log t dt.$$

Reescribiendo $t^z = e^{z \log t}$, obtenemos

$$\frac{d\Gamma(z)}{dz} = \int_0^\infty e^{-t} e^{(z-1) \log t} \log t dt.$$

Note que aunque el $\lim_{t \rightarrow 0} \log t \rightarrow \text{diverge}$, la función $e^{(z-1) \log t}$ hace que la integral converja en $t \rightarrow 0$.

Las derivadas superiores de $\Gamma(z)$ también llevan a integrandos con potencias de $\log t$ y siempre la función $e^{(z-1) \log t}$ asegurará la convergencia de la integral en $t \rightarrow 0$. Concluimos por lo tanto que

$\Gamma(z)$ es finita y analítica para todos los puntos con $Re(z) > 0$.

Escribir la relación 1.2.4 de la función gama en la forma

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{z}, \quad (1.68)$$

nos permite evaluar la función $\Gamma(z)$ en la región

$$-1 + \varepsilon < Re(z) < \varepsilon \quad \text{con } \varepsilon \text{ una cantidad pequeña y positiva,} \quad (1.69)$$

en términos de $\Gamma(z+1)$, la cual sabemos que es analítica para todos los puntos con

$$Re(z+1) > 0. \quad (1.70)$$

La función así definida y la función gama original, tienen una región común de convergencia y podemos por tanto definir una *continuación analítica* a la región

$$-1 + \varepsilon < Re(z) < \varepsilon.$$

Podemos repetir este proceso iterativamente para cubrir más y más regiones en el lado izquierdo del plano complejo, hasta cubrir el plano de manera completa, debido a las diferentes extensiones analíticas. Por ejemplo, cambiando $z \rightarrow z+1$, obtenemos

$$\Gamma(z+1) = \frac{\Gamma(z+2)}{z+1} \quad \Rightarrow \quad \Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+2)}{z(z+1)}, \quad (1.71)$$

donde $\Gamma(z+2)$ es válida para $Re(z) > -2$. Note que en esta definición de la función gama, aparecen explícitamente dos polos, uno en $z=0$ y otro en $z=-1$.

En la iteración siguiente utilizamos nuevamente la relación 1.2.4 para expresar a $\Gamma(z+2)$ como

$$\Gamma(z+2) = \frac{\Gamma(z+3)}{z+2} \Rightarrow \Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+3)}{z(z+1)(z+2)}, \quad (1.72)$$

la cual es válida para $\operatorname{Re}(z) > -3$. Continuando iterativamente concluimos que:

La función $\Gamma(z)$ que se construye por continuación analítica, no es analítica en todo punto del plano complejo, ya que como hemos visto tiene polos simples aislados en los puntos $z = 0, -1, -2, -3, \dots$

Ejemplo 1.3.3 Función gama de números negativos.

Si queremos calcular el valor de la función gama para un número real negativo x , en el intervalo: $x \in (-1, 0)$, utilizamos la relación (1.68). Por ejemplo si $x = -1/2$, tenemos

$$\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(-\frac{1}{2}+1\right)}{-\frac{1}{2}} = -2\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = -2\sqrt{\pi}. \quad (1.73)$$

Si ahora queremos calcular el valor de la función gama para un número real negativo x , en el intervalo: $x \in (-2, -1)$, utilizamos la relación (1.71). Por ejemplo si $x = -3/2$, tenemos

$$\Gamma\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(-\frac{3}{2}+2\right)}{-\frac{3}{2}\left(-\frac{3}{2}+1\right)} = \frac{4}{3}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{4}{3}\sqrt{\pi}. \quad (1.74)$$

Y así sucesivamente.

En la figura 1.5 mostramos la gráfica de la función gama en todo el plano complejo.

Como hemos definido la función factorial en términos de la función gama, también es posible una continuación analítica de la definición 1.3.1. En este caso como vimos en (1.60), la propiedad 1.2.4 se escribe como

$$(z-1)! = \frac{z!}{z}, \quad \text{con } \operatorname{Re}(z) > -1.$$

Una consecuencia de esta relación y de su continuación analítica a todo el plano complejo es que $n! = \pm\infty$ si n es un entero negativo. Esto es fácil de visualizar ya que por ejemplo para $z = 0$ obtenemos

$$(0-1)! = \frac{0!}{0} \Rightarrow (-1)! = \frac{1}{0} \rightarrow \infty.$$

De la continuación analítica de esta expresión

$$(z-2)! = \frac{(z-1)!}{z-1},$$

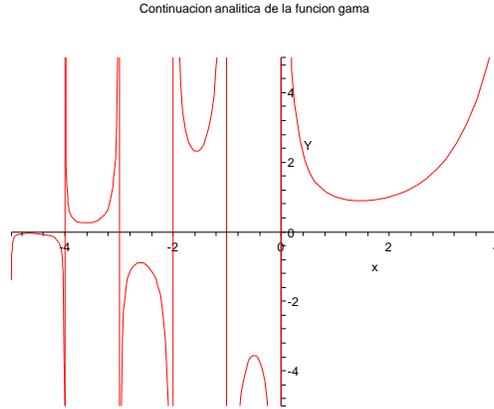


Figura 1.5: Se muestra la gráfica de la función $\Gamma(z)$ en todo el plano complejo. Esta gráfica se obtiene por continuación analítica de la gráfica 1.3

la cual es válida para $Re(z) > -2$, obtenemos

$$(-2)! = \frac{(-1)!}{-1} \rightarrow -\infty,$$

ya que $(-1)!$ diverge. Podemos continuar iterando y obtener este mismo resultado para todos los enteros negativos. El resultado no debería sorprendernos, ya que como hemos visto, la función gama tiene polos simples en $z = 0, z = -1, z = -2, \dots$, y la función factorial se obtiene de la función gama reemplazando la variable z por $z - 1$, con lo cual concluimos que la función factorial tiene polos simples en $z = -1, z = -2, \dots$, etc. En la fig (1.6) presentamos la gráfica de la función factorial en todo el plano complejo

Ejemplo 1.3.4 Desarrollo binomial.

Una aplicación importante del desarrollo de Taylor es la obtención del teorema binomial para potencias negativas y/o potencias no enteras.

Si $f(x) = (1 + x)^n$, en la cual n puede ser un entero no negativo o un número no entero, la aplicación directa de la ecuación (1.28) con $a = 0$, da como resultado

$$(1 + x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \dots + R_k,$$

donde el residuo R_k es

$$R_k = \frac{x^k}{k!}(1 + \xi)^{n-k} \cdot n(n-1) \cdots (n-k+1),$$

donde ξ es un punto entre 0 y x ($0 \leq \xi \leq x$). En el caso en que $k > n$, $(1 + \xi)^{n-k}$ es un máximo para $\xi = 0$. Por lo tanto

$$R_k \leq \frac{x^k}{k!}n(n-1) \cdots (n-k+1).$$

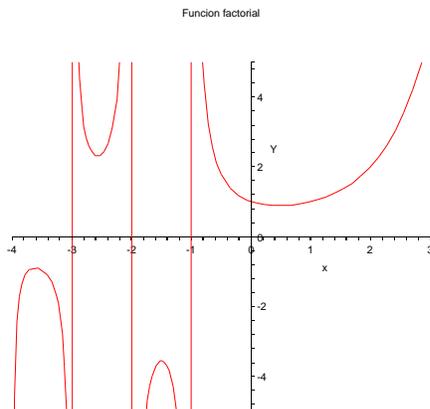


Figura 1.6: Gráfica de la función $z!$ en todo el plano complejo. Note que la función tiene polos en los enteros negativos.

Note que los factores que dependen de la potencia n del binomio, no se anulan a menos que n sea un número entero no negativo. Note también que en el límite $k \rightarrow \infty$, $R_k \rightarrow 0$ si la variable x está restringida al rango $0 \leq x < 1$.

El desarrollo binomial es por tanto

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \dots + \dots \quad (1.75)$$

O en notación equivalente

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{n!}{k!(n-k)!} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(n-k+1)} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n}{k} x^k, \quad (1.76)$$

donde la cantidad $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(n-k+1)}$, es llamada el coeficiente binomial.

Aunque sólo hemos mostrado que el residuo se anula para $0 \leq x < 1$, es posible mostrar que el desarrollo binomial se puede extender al rango $-1 < x < 1$. Como hemos discutido cuando n es un número entero, el factorial $(n-k)! = \pm\infty$, si $k > n$, y la serie termina en $k = n$.

1.3.4. Fórmula de reflexión

En sus curso de variable compleja usted estudió funciones como: $\csc \pi z$ o $\cot \pi z$ y aprendió que estas funciones tienen polos en todos los números enteros.

Es posible construir una función a partir de la función $\Gamma(z)$ que también tenga polos

en todos los enteros, esta función es simplemente

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z), \quad (1.77)$$

ya que $\Gamma(z)$ tiene polos en $z = 0, -1, -2, \dots$, etc. y $\Gamma(1-z)$ tiene polos en $z = 1, 2, 3, \dots$, etc. Una pregunta que surge inmediatamente es: ¿Existe alguna relación entre la función (1.77) y alguna de las funciones $\csc \pi z$ o $\cot \pi z$?

Para dar respuesta a esta pregunta consideremos la definición de Euler 1.2.1 de la función gama

$$\Gamma(z) \equiv \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt.$$

Haciendo el cambio de variable $t \rightarrow t^2 \Rightarrow dt \rightarrow 2t dt$, tenemos

$$\Gamma(z) \equiv \int_0^{\infty} e^{-t^2} (t^2)^{z-1} 2t dt = 2 \int_0^{\infty} e^{-t^2} t^{2z-1} dt.$$

Con lo cual

$$\begin{aligned} \Gamma(a)\Gamma(1-a) &= 4 \int_0^{\infty} e^{-x^2} x^{2a-1} dx \int_0^{\infty} e^{-y^2} y^{1-2a} dy \\ &= 4 \underbrace{\int_0^{\infty} dx \int_0^{\infty} dy}_{\text{integral en el cuadrante I}} e^{-(x^2+y^2)} x^{2a-1} y^{1-2a}. \end{aligned}$$

Realizando esta integral en coordenadas polares ($x = r \cos \theta$ y $y = r \sin \theta$) obtenemos

$$\begin{aligned} \Gamma(a)\Gamma(1-a) &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\infty} e^{-r^2} (r \cos \theta)^{2a-1} (r \sin \theta)^{1-2a} r d\theta dr \\ &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cot \theta)^{2a-1} d\theta \int_0^{\infty} r e^{-r^2} dr = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cot \theta)^{2a-1} d\theta \underbrace{\frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-u} du}_{=1}. \end{aligned}$$

Si hacemos el nuevo cambio de variable $s = \cot \theta \Rightarrow ds = -\csc^2 \theta d\theta = -(1 + \tan^2 \theta) d\theta = -(1 + s^2) d\theta$, obtenemos

$$\Gamma(a)\Gamma(1-a) = -2 \int_{\infty}^0 \frac{s^{2a-1}}{1+s^2} ds = 2 \int_0^{\infty} \frac{s^{2a-1}}{1+s^2} ds.$$

Restringiendo a de forma tal que $0 < \operatorname{Re}(a) < 1$, usted mostrará en su tarea que

$$\int_0^{\infty} \frac{s^{2a-1}}{1+s^2} ds = \frac{\pi}{2 \sin \pi a}.$$

De lo cual concluimos que

$$\Gamma(a)\Gamma(1-a) = \frac{\pi}{\sin \pi a}.$$

Realizando la continuación analítica de esta relación obtenemos finalmente

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}, \quad \text{fórmula de reflexión.} \quad (1.78)$$

¿Para que sirve esta fórmula de reflexión? Sirve para escribir la función gama de cualquier número complejo z cuya parte $\text{Re}z < 0$, en términos de la función gama de un número complejo con $\text{Re}z > 0$.

Ejemplo 1.3.5 Si queremos calcular $\Gamma(-1/2)$ utilizando la fórmula de reflexión tenemos

$$\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(1+\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)} \Rightarrow \Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} = -\frac{\pi}{\frac{\sqrt{\pi}}{2}} = -2\sqrt{\pi}. \quad (1.79)$$

Resultado que coincide con el obtenido en el ejemplo 1.3.3, donde utilizamos la extensión analítica. Para asegurarse de que está entendiendo las cosas satisfactoriamente, muestre que el valor que se obtiene para $\Gamma(-3/2)$ utilizando la fórmula de reflexión, también coincide con el obtenido en el ejemplo 1.3.3.

1.4. Clase 4

En física a menudo nos encontramos con fenómenos donde se involucra el concepto de un pulso de duración “infinitamente corto”. Por ejemplo, en su curso de Mecánica Clásica usted estudió una magnitud física llamada *impulso*, la cual se introduce cuando se cambia el estado de movimiento de un cuerpo al aplicarle un “golpe repentino”. El impulso se denota comúnmente con la letra I . Como ejemplo piense en un penalty, en este caso tenemos inicialmente al balón en reposo, y con un poco de suerte, el balón puede acabar en la red del equipo contrario después de chutar con algo de técnica (Si chuta con una buena técnica entonces no necesita la suerte). Después del chute el balón adquiere un momento que es igual al impulso asociado al chute mismo. Analíticamente esta afirmación se escribe como

$$mv = I = \int_{t_0}^{t_0+\tau} F(t)dt,$$

donde $F(t)$ es la fuerza y τ la duración del chute (técnicamente de la acción de la fuerza sobre el balón). El término “repentino” implica que τ se considera infinitamente pequeña y por tanto, que el cambio en el momento ocurre instantáneamente. Sin embargo, dado que el cambio en el momento es un número finito, se sigue que la magnitud de la fuerza $F(t)$ debió haber sido infinita durante el golpe al balón y cero en cualquier otro momento. Este tipo de descripciones no se puede formular apropiadamente con los conceptos matemáticos que conocemos, más aún, la descripción tampoco es rigurosa desde un punto de vista físico.

En la realidad, la gráfica de la fuerza es una curva muy “picuda” (muy estrecha y muy alta) y satisface la propiedad que el área bajo la curva es igual a I . En la gran mayoría

de los problemas físicos, la forma exacta de la gráfica no se conoce, sin embargo, en lo correspondiente a los efectos físicos observables asociados con tal función, usualmente esta falta de información no importa. Lo que tiene significado es la integral de la fuerza, esto es, el valor del impulso, $I = \int_{t_0}^{t_0+\tau} F(t)dt$. Dado que estos fenómenos aparecen en todas las ramas de la física, dedicaremos este capítulo a estudiar la matemática necesaria para tratar con estos problemas de manera adecuada.

1.4.1. Delta de Dirac

Para poder facilitar una buena cantidad de operaciones en la física matemática y particularmente en la Mecánica Cuántica, el físico teórico Británico, Paul Adrien Maurice Dirac (1902-1984), propuso en su libro *Principles of Quantum Mechanics* publicado en 1930, la introducción de la llamada “función delta” $\delta(x)$.

Informalmente la delta de Dirac es una “función” que representa un pico infinitamente agudo expresado simbólicamente por

$$\delta(x) = \begin{cases} 0 & x \neq 0, \\ \infty, & x = 0, \end{cases} \quad (1.80)$$

pero tal que la integral de $\delta(x)$ está normalizada a la unidad ¹¹

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)dx = 1. \quad (1.81)$$

Propiedad 1.4.1 *Propiedad de filtro.*

La delta de Dirac satisface la propiedad siguiente

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x)dx = f(0), \quad (1.82)$$

donde $f(x)$ es una función continua.

Esta integral puede ser “evaluada” utilizando el argumento siguiente. Dado que $\delta(x) = 0$ para $x \neq 0$, podemos cambiar los límites de integración en la ecuación (1.82) a $-\varepsilon$ y ε , donde ε es un número positivo infinitesimal. Más aún, dado que $f(x)$ es continua en $x = 0$, sus valores dentro del intervalo $(-\varepsilon, \varepsilon)$ no diferirán mucho de $f(0)$ y podemos hacer la aproximación siguiente

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x)dx = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(x)\delta(x)dx \approx f(0) \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta(x)dx.$$

¹¹En el contexto del procesamiento de señales, usualmente se denomina a la delta de Dirac como la función impulso unidad.

Esta aproximación es mejor a medida que $\varepsilon \rightarrow 0$. Sin embargo

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta(x) dx = 1,$$

para todos los valores de ε , porque $\delta(x) = 0$ para $x \neq 0$ y $\delta(x)$ está normalizada. Así en el límite $\varepsilon \rightarrow 0$, tenemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x)dx = f(0).$$

Esta integral es algunas veces llamada la *propiedad de filtro* de la función delta, ya que $\delta(x)$ actúa como un filtro, seleccionando de todos los posibles valores de $f(x)$ su valor en el punto $x = 0$.

1.4.2. Secuencias delta

La afirmación de que la función $\delta(x)$ está dada por la expresión (1.80)

$$\delta(x) = \begin{cases} 0 & x \neq 0, \\ \infty, & x = 0, \end{cases}$$

no es una afirmación apropiada y no se puede utilizar para definir una función, mucho menos una función integrable. Una posible definición alternativa podría ser definir la función $\delta(x)$ como la función que satisface la propiedad de filtro (1.82)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)f(x)dx = f(0),$$

para toda función continua $f(x)$. Sin embargo es posible mostrar de que no existe ninguna función con esta propiedad. Concluimos entonces que:

¡la función delta no es una función en el sentido matemático usual!

¿Que hacemos entonces? ¿Dirac nos engañó? Lo que sucede es que existen secuencias de funciones de pico pronunciado, las cuales en el límite en que el pico es infinitamente delgado e infinitamente alto, satisfacen la propiedad de filtro.

Definición 1.4.2 *Llamamos secuencias delta $\delta_n(x)$, a una secuencia de funciones de pico pronunciado, que satisface*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta_n(x)f(x)dx = f(0).$$

Ejemplo 1.4.3 *La secuencia de funciones*

$$\delta_n(x) = \begin{cases} 0, & x < -\frac{1}{2n}, \\ n, & -\frac{1}{2n} < x < \frac{1}{2n}, \\ 0, & x > \frac{1}{2n}, \end{cases} \quad (1.83)$$

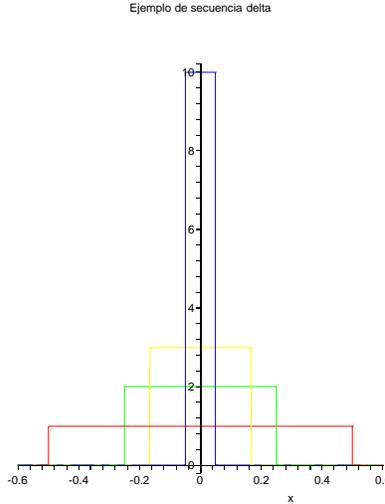


Figura 1.7: Se muestra la gráfica de la secuencia delta (1.83), para los valores: $n = 1, 2, 3$ y 10 . Note que a medida que se incrementa el valor de n , la gráficas se vuelven más angostas y altas. El aréa bajo la curva para cada δ_n es siempre 1. Desde luego, las líneas vérticales no pertenecen a las gráficas, pero se ponen para hacer más clara el área delimitada por cada gráfica.

es una secuencia delta.

Para verificar esta afirmación consideremos la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta_n(x) f(x) dx,$$

para cualquier función arbitraria $f(x)$. De la expresión (1.83) para la secuencia delta tenemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta_n(x) f(x) dx = \int_{-\frac{1}{2n}}^{\frac{1}{2n}} n f(x) dx = n \int_{-\frac{1}{2n}}^{\frac{1}{2n}} f(x) dx.$$

Invocando el teorema del valor medio para integrales, podemos deducir que

$$n \int_{-\frac{1}{2n}}^{\frac{1}{2n}} f(x) dx = n \frac{1}{n} f(\xi) = f(\xi), \quad \text{con: } -\frac{1}{2n} \leq \xi \leq \frac{1}{2n}.$$

En el límite $n \rightarrow \infty$, $\xi \rightarrow 0$. De la continuidad de la función $f(x)$ se sigue que $f(\xi) \rightarrow f(0)$, obteniendo así el resultado

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta_n(x) f(x) dx = f(0),$$

el cual indica que la secuencia (1.83) es una secuencia delta.

Note que la secuencia delta (1.83) no es derivable en 0. Para muchos propósitos es deseable construir secuencias delta de funciones que sean continuas y diferenciables. Por ejemplo, algunas secuencias delta con estas características son

$$\delta_n(x) = \frac{n}{\sqrt{\pi}} e^{-n^2 x^2}, \quad (1.84)$$

$$\delta_n(x) = \frac{n}{\pi} \frac{1}{1 + x^2 n^2}, \quad (1.85)$$

$$\delta_n(x) = \frac{\sin nx}{\pi x} = \frac{1}{2\pi} \int_{-n}^n e^{ixt} dt. \quad (1.86)$$

Todas estas funciones están normalizadas a la unidad

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta_n(x) dx = 1, \quad (1.87)$$

y cada secuencia satisface la propiedad de filtro (1.4.2).

No está de más enfatizar que es incorrecto decir que las secuencias convergen a la función delta. De hecho los límites de estas secuencias no existen, según la definición usual de convergencia.

1.4.3. Propiedades de la delta de Dirac

Una vez que hemos definido la delta de Dirac, nos gustaría saber ahora como operar con/en ella. ¿Es posible decir algo sobre su derivada? La respuesta a esta pregunta es afirmativa y las secuencias delta hechas de funciones diferenciables nos permiten responder a la pregunta de manera precisa.

Propiedad 1.4.4 *Propiedad de filtro de las derivadas.*

La delta de Dirac satisface la propiedad siguiente

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\delta(x)}{dx} f(x) dx = -\frac{df(0)}{dx}, \quad (1.88)$$

con $f(x)$ una función diferenciable.

Para mostrar esta propiedad consideremos como ejemplo la secuencia delta (1.84), formada por funciones Gaussianas. Tenemos que su derivada está dada por ¹²

$$\frac{d\delta_n(x)}{dx} = -\frac{2n^3}{\sqrt{\pi}} x e^{-n^2 x^2} = -2n^2 \delta_n(x).$$

¹²Note que estas derivadas están bien definidas porque las $\delta_n(x)$ son funciones bien comportadas, lo que no es una función es el $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n(x)$.

Si consideramos la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\delta_n(x)}{dx} f(x) dx,$$

tenemos después de integrar por partes

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\delta_n(x)}{dx} f(x) dx = \delta_n(x) f(x) \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \delta_n(x) \frac{df(x)}{dx} dx.$$

Suponiendo que ¹³

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \delta_n(x) f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{n}{\sqrt{\pi}} e^{-n^2 x^2} f(x) = 0,$$

entonces al tomar el límite $n \rightarrow \infty$, obtenemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\delta_n(x)}{dx} f(x) dx = - \int_{-\infty}^{\infty} \delta_n(x) f'(x) dx = -f'(0). \quad (1.89)$$

o en notación compacta

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta'(x) f(x) dx = -f'(0).$$

Esta propiedad se puede generalizar para derivadas de orden superior, obteniendo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^m \delta_n(x)}{dx^m} f(x) dx = (-1)^m \frac{d^m f(0)}{dx^m}. \quad (1.90)$$

Donde se asume que las funciones involucradas son m -veces diferenciables y que las integrales

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^k \delta_n(x)}{dx^k} f(x) dx, \quad (1.91)$$

convergen $\forall n$ y $\forall k$, con $k = 0, 1, \dots, m$.

Desde luego en este caso también es posible adoptar una notación similar a (1.88) y escribir el resultado (1.90) en la forma

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^m \delta_n(x)}{dx^m} f(x) dx = (-1)^m \frac{d^m f(0)}{dx^m}. \quad (1.92)$$

Con esto queda claro que considerar a $\delta(x)$ y sus derivadas como funciones en el sentido ordinario (*recuerde que nos son funciones en el sentido ordinario*), es un método económico para obtener resultados que dependen de ciertos procesos de límite, sin ir a ellos. Este procedimiento es ampliamente utilizado en la literatura en física y produce resultados correctos. Usted lo podrá utilizar sin problemas, pero ahora usted está consciente de su significado.

¹³Esta suposición usualmente es verdadera dado que consideramos funciones $f(x)$ para las cuales la integral $\int_{-\infty}^{\infty} \delta_n(x) f(x) dx$, converge.

Podemos desarrollar las diferentes propiedades de la delta $\delta(x)$ mediante operaciones analíticas formales donde tratamos a la delta de Dirac como si fuera “función”. Esto se hace considerando como propiedades básicas de la delta de Dirac las propiedades siguientes

$$\delta(x) = \begin{cases} 0 & x \neq 0, \\ \infty, & x = 0, \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1, \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x) dx = f(0), \quad \delta(x) = \frac{d}{dx} S(x),$$

e ignorando su justificación matemática.

Algunas propiedades de la delta de Dirac

La delta de Dirac satisface varias propiedades y conocerlas es de mucha utilidad cuando resolvemos problemas específicos en física. Por ejemplo, para el producto de la delta de Dirac con una función se tiene que

$$x\delta(x) = 0, \quad (1.93)$$

$$f(x)\delta(x-a) = f(a)\delta(x-a). \quad (1.94)$$

La paridad de la delta de Dirac y de su derivada es

$$\delta(-x) = \delta(x), \quad (1.95)$$

$$\delta'(-x) = -\delta'(x). \quad (1.96)$$

También satisface las relaciones

$$\delta(ax) = \frac{1}{|a|} \delta(x), \quad a \neq 0, \quad (1.97)$$

$$\delta(x^2 - a^2) = \frac{1}{2a} [\delta(x+a) + \delta(x-a)], \quad a > 0, \quad (1.98)$$

y las propiedades de filtro

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x-a) dx = f(a),$$

$$\int \delta(a-x) \delta(x-b) dx = \delta(a-b).$$

1.4.4. Distribuciones

Las ideas que nos permitieron desarrollar el concepto de la delta de Dirac en las subsecciones anteriores se pueden sistematizar en lo que se conoce como la *teoría de distribuciones* o *funciones generalizadas*. Las funciones generalizadas fueron introducidas

en 1935 por el matemático Ruso, Sergéi Lvóvich Sóbolev (1908-1989). De manera independiente a finales de la década de 1940, el matemático Francés, Laurent Schwartz (1915-2002) formalizó la teoría de distribuciones, lo que le valió la Medalla Fields en 1950.

Como el nombre lo sugiere, la teoría tiene como objetivo *extender la definición de una función*, de manera tal que conceptos como el de la delta de Dirac $\delta(x)$ se puedan poner sobre una base matemática firme. En particular la teoría permite extender el concepto de derivada a todas las funciones localmente integrables y a entes aún más generales. Existen varias formas de presentar la teoría de distribuciones y aquí se dará una breve introducción utilizando las integrales de secuencias de funciones del tipo

$$\int f_n(x)g(x) dx, \quad \text{con } n = 1, 2, 3, \dots \quad (1.99)$$

Para ello es necesario introducir tres conceptos: 1) El concepto de función de prueba, 2) el concepto de función admisible y 3) el concepto de convergencia débil.

Hemos visto que una secuencia de funciones $f_n(x)$ tal como la secuencia delta de funciones, definida en 1.4.2, nos lleva al concepto matemático de “función delta”, si la secuencia de integrales converge para funciones *apropiadas* $g(x)$. Pero ¿Qué quiere decir que sean apropiadas? En la sección anterior vimos que si queremos definir conceptos tales como las derivadas de la función delta, entonces las funciones $g(x)$ deben ser diferenciables. Para definir las derivadas también hemos visto que al integrar por partes, para que las derivadas totales no contribuyan, es necesario que la función $g(x)$ tenga un comportamiento apropiado en infinito. Definimos entonces las funciones $g(x)$ como

Definición 1.4.5 *Funciones de prueba.*

Decimos que las función $g(x)$ en (1.99) es de prueba, si es infinitamente diferenciable (clase C^∞) y es idénticamente cero fuera de algún intervalo (a, b) (en general este intervalo es diferente para funciones $g(x)$ diferentes).

El nombre de funciones de prueba es adecuado, dado que por ejemplo, la propiedad de filtro de las secuencias delta, se *prueba* sobre estas funciones. Habiendo definido las funciones de prueba, podemos ahora definir las funciones admisibles (de las cuales seleccionaremos las funciones $f_n(x)$) y la convergencia débil.

Definición 1.4.6 *Funciones admisibles.*

Decimos que las funciones $f_n(x)$ en (1.99) son admisibles,¹⁴ si son infinitamente diferenciables. Su comportamiento en infinito puede ser arbitrario.

Definición 1.4.7 *Convergencia débil.*

¹⁴No existe una nomenclatura universal en la teoría de distribuciones. Algunos autores se refieren a estas funciones como *funciones núcleo*.

Consideremos una secuencia de funciones admisibles $f_n(x)$ ($n = 1, 2, 3, \dots$). Decimos que esta secuencia es débilmente convergente si el límite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)g(x)dx, \quad (1.100)$$

existe para todas las funciones de prueba $g(x)$.

Una secuencia débilmente convergente puede o no puede converger en alguno de los sentidos de convergencia usual, como *convergencia puntual*.

Podemos dar ahora una definición rigurosa de una distribución como sigue:

Definición 1.4.8 *Distribuciones.*

Una distribución $\phi(x)$ es un concepto matemático asociado con una secuencia débilmente convergente de funciones admisibles para la cual la integral simbólica

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)g(x) dx, \quad (1.101)$$

tiene un significado preciso, por medio de la prescripción

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)g(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)g(x) dx. \quad (1.102)$$

1.5. Problemas

1. Determine si la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{3} + \frac{2}{5} + \frac{3}{7} + \frac{4}{9} + \dots + \frac{n}{2n+1} + \dots$$

converge o diverge.

2. Utilizando el criterio de comparación, determine si las series siguientes convergen o divergen

a)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^4} + \dots + \frac{1}{n^n} + \dots$$

b)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \dots$$

3. Utilizando el criterio de d'Alambert, determine si las series siguientes convergen o divergen

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}, \quad b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n}, \quad c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}, \quad d) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}.$$

4. ¿Cuál es el valor de la serie geométrica para $r < 0$?

5. Muestre que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1.$$

Ayuda: Encuentre la n -ésima suma parcial S_n y verifique su validez utilizando inducción matemática.

6. Muestre que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2}.$$

7. Muestre que la serie siguiente es convergente

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)}.$$

Nota: Esta serie aparece cuando se desarrolla en serie la función $\arcsin x$ en $x = 1$ y su valor es $\pi/2$.

8. Muestre que

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} \left[e^{-t} - \sum_{k=0}^n \frac{(-t)^k}{k!} \right] t^{z-1} dt, \quad \text{para } -n-1 < \operatorname{Re}(z) < -n.$$

9. Muestre que

$$\frac{(s-n)!}{(2s-2n)!} = \frac{(-1)^{n-s}(2n-2s)!}{(n-s)!}.$$

Aquí s y n son números enteros con $s < n$. Este resultado se utiliza para evitar factoriales negativos, como los que aparecen en las representaciones en serie de las funciones de Neumann esféricas y las funciones de Legendre del segundo tipo.

10. En una distribución de velocidades Maxwelliana, la fracción de partículas que tienen una velocidad en el intervalo $[v, v + dv]$ es

$$\frac{dN}{N} = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} v^2 dv,$$

donde: N es el número total de partículas, m es la masa de las partículas, k la constante de Boltzman y T la temperatura. El promedio o valor esperado de v^n se define como $\langle v^n \rangle = N^{-1} \int v^n dN$. Muestre que

$$\langle v^n \rangle = \left(\frac{2kT}{m} \right)^{n/2} \frac{\left(\frac{n+1}{2} \right)!}{\left(\frac{1}{2} \right)!}.$$

11. Transformando la integral siguiente en una función gamma, muestre que

$$-\int_0^1 x^k \ln x dx = \frac{1}{(k+1)^2}, \quad k > -1.$$

12. Muestre que

$$\int_0^\infty e^{-x^4} dx = \left(\frac{1}{4} \right)!$$

13. Muestre que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(ax-1)!}{(x-1)!} = \frac{1}{a}.$$

14. Las integrales Gaussianas siguientes aparecen recurrentemente en física estadística. Muestre que:

a)

$$\int_0^\infty x^{2s+1} e^{-ax^2} dx = \frac{s!}{2a^{s+1}}.$$

b)

$$\int_0^\infty x^{2s} e^{-ax^2} dx = \frac{\left(s - \frac{1}{2}\right)!}{2a^{s+1/2}} = \frac{(2s-1)!!}{2^{s+1} a^s} \sqrt{\frac{\pi}{a}}.$$

15. Muestre que

$$\gamma = -\int_0^\infty e^{-t} \log t dt,$$

donde γ es la constante de Euler-Mascheroni.

16. a) Una función relacionada de manera muy cercana a la función gamma es la función beta definida por

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt, \quad \text{Re}(x, y) > 0.$$

Muestre que esta función se puede escribir como

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

b) Muestre que

$$\int_0^{\infty} \frac{\cosh 2yt}{(\cosh t)^{2x}} dt = 2^{2x-2} \frac{\Gamma(x+y)\Gamma(x-y)}{\Gamma(2x)}.$$

17. Verifique que la secuencia $\delta_n(x)$ basada en la función

$$\delta_n(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ ne^{-nx}, & x > 0, \end{cases}$$

es una secuencia delta. Note que la singularidad está en 0^+ , el lado positivo del origen.

Ayuda: Reemplace el límite superior ∞ por c/n , donde c es un número grande pero finito y utilice el teorema del valor medio del cálculo integral.

18. Para la función

$$\delta_n(x) = \frac{n}{\pi} \cdot \frac{1}{1+n^2x^2},$$

muestre que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta_n(x) dx = 1.$$

19. Demuestre que la secuencia

$$\delta_n = \frac{\sin nx}{\pi x},$$

es una secuencia delta, mostrando que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \frac{\sin nx}{\pi x} dx = f(0).$$

Para ello suponga que la función $f(x)$ es continua en $x = 0$ y que se anula en $x \rightarrow \pm\infty$.

Ayuda: Reemplace x por y/n y tome el $\lim_{n \rightarrow \infty}$ antes de integrar.

20. Muestre que

$$\delta(a(x - x_0)) = \frac{1}{a} \delta(x - x_0).$$

21. Muestre que

$$\delta((x - x_1)(x - x_2)) = \frac{\delta(x - x_1) + \delta(x - x_2)}{|x_1 - x_2|}.$$

2

Series de Fourier

El primer ejemplo de series ortogonales en espacios euclidianos de dimensión infinita que estudiaremos en este curso es el de las *Series de Fourier*. Históricamente el matemático y físico francés, *Jean Baptiste Joshep Fourier* (1768-1830) en su *Théorie analytique de le Chaleur* (1822), resolvió por primera vez el problema del flujo del calor en cuerpos sólidos, por medio de las series que ahora llevan su nombre. Fourier estableció que una función arbitraria $f(x)$ definida en el intervalo $(-\pi, \pi)$, se puede expresar como una serie trigonométrica de la forma

$$f(x) = a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x + \dots$$

donde los coeficientes constantes $a_0, a_1, a_2, \dots, b_1, b_2, \dots$, quedan determinados completamente por la función $f(x)$ ¹.

Fourier mostró con la rigurosidad que la matemática de su tiempo le permitió, que el desarrollo es correcto para *ciertas* funciones que el necesitaba en el problema de la conducción del calor. A pesar de que no desarrolló la demostración para el caso general con la precisión e importancia que el teorema demanda, se admite la exactitud de su método. El hecho de que el desarrollo es posible en el caso de funciones arbitrarias, tal y como era entendido el problema en su tiempo, se supuso como verdadero a partir de que se conoció su trabajo. Desde entonces estas series se han utilizado libremente en la solución de las ecuaciones diferenciales de la física matemática y han tenido una inmensa influencia en el desarrollo de la teoría de funciones de variable real.

Este capítulo los dedicaremos al estudio de las series de Fourier. En la clase 5 definiremos la serie de Fourier y desarrollaremos varios ejemplos de su aplicación. En particular

¹Discutiremos la forma de estos coeficientes con todo detalle más adelante en este capítulo

discutiremos un ejemplo del uso de las series de Fourier para calcular funciones zeta de Riemann. En la clase 6 discutimos la forma compleja de la serie así como el fenómeno de Gibbs.

2.1. Clase 5

2.1.1. Series de Fourier

Una serie de Fourier se puede definir como un desarrollo de una función o representación de una función en una serie de senos y cosenos

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \quad (2.1)$$

donde los coeficientes a_0 , a_n y b_n , son constantes que dependen de $f(x)$. Dado que en lado derecho de esta ecuación tenemos funciones de periodo 2π , la función $f(x)$ también tiene periodo 2π , esto es, $f(x) = f(x + 2\pi)$.

Como $f(x)$ debe ser una función periódica, es claro que este desarrollo no puede ser válido para cualquier función arbitraria $f(x)$. Así surge la pregunta siguiente ¿Qué condiciones debe satisfacer la función $f(x)$ para que exista su desarrollo en serie de Fourier? Dos condiciones *suficientes* pero *no necesarias* para que $f(x)$ se pueda desarrollar en serie son conocidas como las condiciones de Dirichlet.

Definición 2.1.1 *Se dice que una función $f(x)$ en el intervalo cerrado $a \leq x \leq b$, satisface las condiciones de Dirichlet si*

- $f(x)$ es continua a pedazos.
- El intervalo $[a, b]$ se puede dividir en un número finito de subintervalos donde $f(x)$ es monótona ².

Recordemos al lector que una función se llama continua a pedazos en el segmento $[a, b]$, si el intervalo se puede dividir por los puntos x_1, x_2, \dots, x_{n-1} en un número finito de subintervalos $(a, x_1)(x_1, x_2)(x_2, x_3) \cdots (x_{n-1}, b)$, de forma tal que la función sea continua en cada uno de los subintervalos. Que la función sea monótona en cada uno de los subintervalos quiere decir que en cada subintervalo la función es derivable y que la derivada no cambia de signo.

De la definición se deduce, que si la función $f(x)$ es monótona a pedazos y acotada en el segmento $[a, b]$, entonces puede tener sólo puntos de discontinuidad de primera especie

²En la literatura a veces se encuentran las condiciones equivalentes:

- $f(x)$ tiene únicamente un número finito de discontinuidades finitas.
- $f(x)$ tiene un número finito de valores extremos (máximos, mínimos).

o finitos. Si por ejemplo el punto $x = c$ es un punto de discontinuidad de la función $f(x)$, entonces, en virtud de la monotonía de la función existen los límites

$$\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = f(c^-) \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = f(c^+), \quad (2.2)$$

y la diferencia $f(c^+) - f(c^-)$, es un número finito.

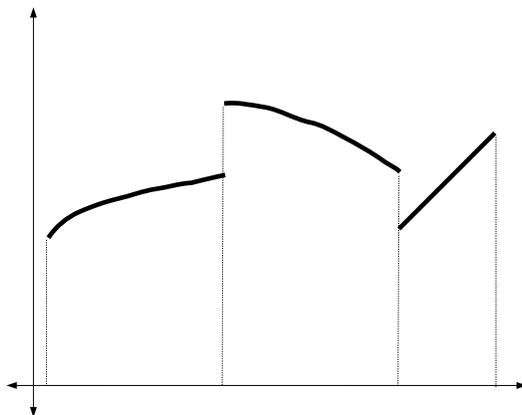


Figura 2.1: La figura muestra una función $f(x)$ continua a pedazos .

Vale la pena mencionar que existen ejemplos de funciones que no son de este tipo y que pueden desarrollarse en series de Fourier. Sin embargo en la mayoría de los problemas de interés en física, estas condiciones se satisfacen y por tanto nos restringiremos al estudio de funciones que satisfagan las condiciones de Dirichlet.

La siguiente pregunta que surge es ¿Cómo calculamos los coeficientes a_n y b_n ? Tenemos que las funciones seno y coseno satisfacen las siguientes relaciones de ortogonalidad que usted mostrará en la tarea 1

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) \sin(mx) dx &= \begin{cases} 0 & m = n = 0, \\ \pi \delta_{nm} & m \neq 0, n \neq 0, \end{cases} \\ \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \cos(mx) dx &= \begin{cases} 2\pi & m = n = 0, \\ \pi \delta_{nm} & m \neq 0, n \neq 0, \end{cases} \\ \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) \cos(mx) dx &= 0, \quad \forall m, n \in \mathbb{Z}, \end{aligned} \quad (2.3)$$

donde δ_{mn} es la delta de Kronecker ³, la cual se define como

$$\delta_{mn} = \begin{cases} 1, & \text{si } m = n, \\ 0, & \text{si } m \neq n. \end{cases} \quad (2.4)$$

³La delta de Kronecker es el análogo discreto de la delta de Dirac (1.80).

Note que en estas relaciones cualquier intervalo $x_0 \leq x \leq x_0 + 2\pi$, es igualmente satisfactorio. Frecuentemente se tiliza $x_0 = -\pi$, para obtener el intervalo $-\pi \leq x \leq \pi$.

Para encontrar los coeficientes a_n multiplicamos ambos miembros de la serie (2.1) por $\cos mx$

$$f(x) \cos mx = \frac{a_0}{2} \cos mx + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx \cos mx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx \cos mx,$$

e integramos en el intervalo de definición

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx dx &= \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx dx + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx dx + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos mx dx = \frac{a_0}{2} 2\pi \delta_{0m} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \pi \delta_{mn}. \end{aligned}$$

Si $m = 0$, sólo el primer término de la suma contribuye y obtenemos así a_0 . Si $m > 0$ el primer término se anula y únicamente contribuye el término m -ésimo a la suma del segundo término, obteniendo así el valor de a_m . Explícitamente

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx, \\ a_m &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx dx, \quad m > 0, \end{aligned} \right\} \Rightarrow a_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx dx, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (2.5)$$

De manera análoga si ahora multiplicamos la serie (2.1) por la función $\sin mx$ e integramos sobre todo el intervalo de definición obtenemos

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin mx dx &= \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx dx + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \sin mx dx + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx dx = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \pi \delta_{mn} = \pi b_m, \quad \text{con } m > 0, \end{aligned}$$

obteniendo así la expresión de los coeficientes b_m

$$b_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin mx dx, \quad m > 0, \quad (2.6)$$

Sustituyendo estos coeficientes en la expresión original de la serie (2.1) obtenemos la expresión final de la serie de Fourier

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\left[\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt dt \right] \cos nx + \left[\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin nt dt \right] \sin nx \right). \quad (2.7)$$

Ejemplo 2.1.2 Sea $f(x)$ una función de periodo 2π definida como

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{para } 0 < x \leq \pi, \\ -x & \text{para } -\pi \leq x \leq 0. \end{cases} \quad (2.8)$$

Esto es, trabajaremos con copias de la función valor absoluto $f(x) = |x|$ en el intervalo $x \in [-\pi, \pi]$. Dado que la función seno y coseno son funciones con paridad bien definida, podemos utilizar su paridad para simplificar el cálculo de las integrales. Recuerde que el coseno es una función par, $\cos(-x) = \cos x$, el seno una función impar, $\sin(-x) = -\sin x$ y la función valor absoluto es una función par $|-x| = |x|$.

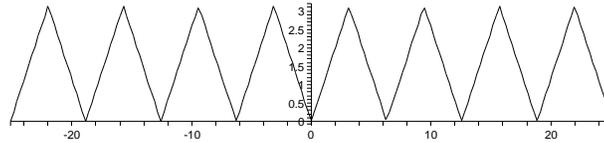


Figura 2.2: La figura muestra la función valor absoluto en el intervalo $[-\pi, \pi]$ y su extensión periódica.

De la expresión general (2.5) para los coeficientes a_n , obtenemos para $n = 0$

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 |x| dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} |x| dx = \frac{1}{\pi} \int_{\pi}^0 |-x| d(-x) + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} |x| dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} |x| dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} |x| dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} |x| dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x dx = \frac{1}{\pi} x^2 \Big|_0^{\pi} = \pi, \end{aligned}$$

mientras que para el caso $n > 0$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| \cos nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left[\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{n} x \sin nx \right) - \frac{1}{n} \sin nx \right] dx \\ &= \frac{2}{\pi} \left[\frac{1}{n} x \sin nx + \frac{1}{n^2} \cos nx \right]_0^{\pi} = \frac{2}{n^2 \pi} (\cos(n\pi) - 1) = \frac{2}{n^2 \pi} ((-1)^n - 1) \\ &= \begin{cases} -\frac{4}{n^2 \pi} & \text{para } n \text{ impar,} \\ 0 & \text{para } n \text{ par.} \end{cases} \end{aligned}$$

Por último los coeficientes $b_n = 0$, dado que el producto de funciones, $|x| \sin nx$, es una función impar. Sustituyendo el valor de los coeficientes que hemos obtenido en la expresión general de la serie de Fourier (2.1), obtenemos finalmente

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left[\cos x + \frac{1}{3^2} \cos 3x + \frac{1}{5^2} \cos 5x + \frac{1}{7^2} \cos 7x + \dots \right] \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos[(2k+1)x]}{(2k+1)^2}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Ejemplo 2.1.3 Obtengamos la serie de Fourier de la función $f(x) = x$, en el intervalo $-\pi < x \leq \pi$.

Dado que $f(x)$ es una función impar, se tiene que $a_0 = 0$. Para $n > 0$, dado que el $\cos nx$ es par, entonces el producto $x \cos nx$ es una función impar y $a_n = 0$. Finalmente tenemos para los coeficientes b_n

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin nx \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin x \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left[\frac{d}{dx} \left(-\frac{1}{n} x \cos nx \right) + \frac{1}{n} \cos nx \right] dx \\ &= \frac{2}{\pi} \left[-\frac{1}{n} x \cos nx + \frac{1}{n^2} \sin nx \right]_0^{\pi} = -\frac{2}{n} \cos(n\pi) = -\frac{2}{n} (-1)^n = (-1)^{n+1} \frac{2}{n}. \end{aligned}$$

Sustituyendo el valor que hemos obtenido para los coeficientes, en la expresión general de la serie de Fourier (2.1) obtenemos

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx = 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin nx}{n} \\ &= 2 \left[\sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 4x}{4} + \dots \right]. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Note que si evaluamos la serie de Fourier (2.10) en el punto $x = \pi$ obtenemos $f(x = \pi) = 0$, sin embargo al definir la función hemos establecido que $f(x = \pi) = \pi$, con lo cual surge la pregunta ¿Por qué son diferentes estos valores? La respuesta es sencilla, debido a la discontinuidad de la función $f(x)$ en el punto $x = \pi$. Dada la importancia de este resultado, elaboremos un poco más sobre él. Para ello enumeremos las características del ejemplo que acabamos de analizar.

1. Existe un incremento en la exactitud de la representación cuando se incrementa el número de términos que se consideran en la serie.
2. Todos los términos de la serie y por tanto, la gráfica que representa la suma de un número finito de términos, pasan por el punto $(x = \pi, y = 0)$.
3. En la gráfica de la suma parcial $S_n(x)$, existe un salto en la vecindad del punto $x = \pi$.

Comportamiento en las discontinuidades

. El comportamiento de la serie de Fourier (2.10) en el punto $x = \pi$, es un ejemplo de una regla general de que en una discontinuidad finita la serie converge a la media aritmética. Para una discontinuidad en $x = c$, la serie produce

$$f(c) = \frac{1}{2} [f(c^+) + f(c^-)].$$

En nuestro ejemplo tenemos $f(x = \pi) = \frac{1}{2}[f(\pi^+) + f(\pi^-)] = \frac{1}{2}[\pi + (-\pi)] = 0$.

Los resultados y propiedades hasta ahora descritos, quedan resumidos en el siguiente teorema sobre la convergencia de las series de Fourier

Teorema 2.1.4 *Convergencia de las series de Fourier.*

Si la función periódica $f(x)$ de periodo 2π , es monótona a pedazos y acotada en el segmento $[-\pi, \pi]$, entonces la serie de Fourier, formada para esta función converge en todos los puntos. La suma $S(x)$ de la serie obtenida, es igual al valor de la función $f(x)$ en los puntos de continuidad de la función. En los puntos de discontinuidad de la función, la suma de la serie es igual al medio aritmético de los límites de la función $f(x)$ a la derecha y a la izquierda, es decir, si $x = c$ es un punto de discontinuidad de la función $f(x)$, entonces tenemos

$$S(x)|_{x=c} = \frac{1}{2} [f(c^-) + f(c^+)]. \quad (2.11)$$

2.1.2. Características de las series de Fourier

Existen un par de propiedades generales que podemos observar en el par de ejemplos de series de Fourier que hemos desarrollado y que deseamos remarcar.

La primera de ellas es bastante obvia y está relacionada con las propiedades de simetría de la función $f(x)$. Dado que en el intervalo $[-\pi, \pi]$, las funciones $\cos nx$ y $\sin nx$ son funciones pares e impares respectivamente, entonces de (2.5) todos los coeficientes $a_n = 0$, si $f(x)$ es impar, y de (2.6) todos los coeficientes $b_n = 0$, si $f(x)$ es par. En otras palabras

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx), \quad \text{si } f(x) \text{ es par,} \quad (2.12)$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx), \quad \text{si } f(x) \text{ es impar.} \quad (2.13)$$

La segunda propiedad es menos obvia, pero puede mostrarse que es una propiedad general (ver por ejemplo el libro de Arfken y las referencias ahí citadas).

1. Si la función $f(x)$ no tiene discontinuidades (aunque posiblemente tenga derivadas discontinuas, como en el ejemplo (2.1.2)), podemos esperar que el n -ésimo coeficiente decaiga como $1/n^2$.
2. Si la función $f(x)$ tiene discontinuidades (como en el ejemplo (2.1.3)), podemos esperar que el n -ésimo coeficiente de la serie decaiga como $1/n$. En este caso la convergencia es relativamente lenta.

2.1.3. Series infinitas y función zeta de Riemann

Una aplicación interesante de las series de Fourier, es el cálculo de series infinitas asociadas a la función zeta de Riemann $\zeta(s)$. Aunque en este curso no estudiaremos con detenimiento esta función, baste decir que la función zeta de Riemann tiene una importancia significativa en la teoría de números, por su relación con la distribución de los números primos. También tiene aplicaciones en otras áreas tales como la física y la teoría de probabilidades. La función $\zeta(s)$ se define mediante la serie de Dirichlet

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \quad \{s \in \mathbb{C} | \operatorname{Re} s > 0\}. \quad (2.14)$$

No diremos mucho más de esta función, salvo que con la ayuda de las series de Fourier, es posible calcular esta función para los casos en que $s = 2n$ con $n \in \mathbb{N}$. Veamos un ejemplo de este tipo de cálculo.

Ejemplo 2.1.5 Desarrolle la función $f(x) = x^2$ definida en el intervalo $-\pi < x < \pi$, en serie de Fourier.

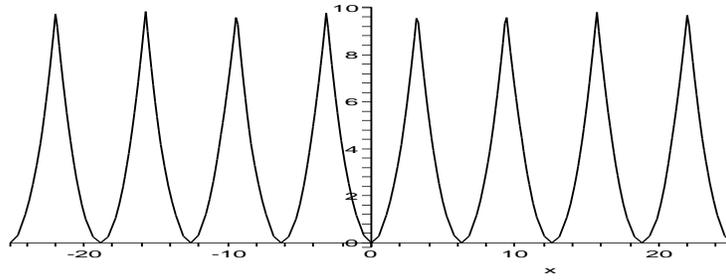


Figura 2.3: La figura muestra la función $f(x) = x^2$ en el intervalo $-\pi < x < \pi$, y su extensión periódica.

Dado que la función x^2 es una función par, sabemos que los únicos coeficientes de la serie que pueden ser no nulos son los coeficientes a_n (2.12). De la expresión general (2.5) tenemos que para $n = 0$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 dx = \frac{2}{3\pi} x^3 \Big|_0^{\pi} = \frac{2\pi^2}{3}.$$

Mientras que para $n > 0$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \cos nx dx \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left[\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{n} x^2 \sin nx \right) - \frac{1}{n} 2x \sin nx \right] dx = \frac{2}{\pi} \left[\frac{1}{n} x^2 \sin nx \Big|_0^{\pi} - \frac{2}{n} \int_0^{\pi} x \sin nx dx \right] \\ &= -\frac{4}{n\pi} \int_0^{\pi} x \sin nx = (-1)^n \frac{4}{n^2}, \end{aligned}$$

donde la última integral la hemos calculado ya en el ejemplo (2.1.3). Concluimos así que la serie de Fourier de x^2 es

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nx. \quad (2.15)$$

Del teorema (2.1.4) sabemos que esta serie converge para todo punto x en el intervalo $[-\pi, \pi]$. En particular esta serie converge para el punto $x = \pi$. Si evaluamos la serie en este punto obtenemos el valor particular

$$\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos n\pi = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (-1)^n}{n^2} = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Despejando de esta ecuación la suma obtenemos

$$\frac{2\pi^2}{3} = 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2},$$

y por lo tanto el valor de la función zeta de Riemann $\zeta(2)$ es

$$\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}. \quad (2.16)$$

En su tarea usted tendrá la oportunidad de calcular la función zeta de Riemann para otros valores de s .

2.2. Clase 6

2.2.1. Cambio de intervalo

Hasta ahora hemos restringido nuestra atención a un intervalo de longitud 2π . Esta restricción se puede relajar de manera muy sencilla. Si $f(x)$ es una función periódica con periodo $2L$, podemos hacer, realizando el cambio de variable $x \equiv Lt/\pi$, que la función $f\left(\frac{L}{\pi}t\right)$ tenga periodo 2π y desarrollar la función en serie de Fourier. Así por ejemplo si $x \in [-L, L]$, mediante el cambio de variable, el intervalo de definición de la nueva variable es $t \in [-\pi, \pi]$. Tenemos entonces según la ecuación (2.1)

$$f\left(\frac{L}{\pi}t\right) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt), \quad (2.17)$$

donde según las ecuaciones (2.5) y (2.6)

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{L}{\pi}t\right) \cos nt \, dt, \quad y \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{L}{\pi}t\right) \sin nt \, dt. \quad (2.18)$$

Regresando a la variable $x = \frac{L}{\pi}t \Rightarrow dt = \frac{\pi}{L}dx$, obtenemos según (2.17)

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right], \quad (2.19)$$

donde los coeficientes son ahora según (2.18)

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx, \quad \text{y} \quad b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx. \quad (2.20)$$

Note que en el caso particular en que $L = \pi$, la serie de Fourier (2.19) se reduce a la serie (2.1) y la expresión de los coeficientes (2.20) se reduce a (2.5) y (2.6), como era de esperarse.

Ejemplo 2.2.1 *Obtengamos la serie de Fourier de la función escalón definida por*

$$f(x) = \begin{cases} +V & \text{si } 0 < x < L, \\ -V & \text{si } -L < x < 0, \end{cases} \quad (2.21)$$

donde V es una constante.

Dado que la función escalón es una función impar, sabemos ya que la serie de Fourier sólo puede tener coeficientes b_n no nulos. De la ecuación (2.20) tenemos que

$$\begin{aligned} b_n &= -\frac{V}{L} \int_{-L}^0 \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx + \frac{V}{L} \int_0^L \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \frac{2V}{L} \int_0^L \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \\ &= -\frac{2V}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \Big|_0^L = \frac{2V}{n\pi} (1 - (-1)^n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ es par,} \\ \frac{4V}{n\pi} & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases} \end{aligned}$$

Tenemos así que la serie de Fourier es según (2.19) es

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{4V}{\pi} \left[\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) + \frac{1}{3} \sin\left(\frac{3\pi x}{L}\right) + \frac{1}{5} \sin\left(\frac{5\pi x}{L}\right) + \frac{1}{7} \sin\left(\frac{7\pi x}{L}\right) + \dots \right] \\ &= \frac{4V}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2m+1} \sin\left(\frac{(2m+1)\pi x}{L}\right). \end{aligned} \quad (2.22)$$

No está de más hacer énfasis en el hecho de que cuando resuelva un problema de series de Fourier, lo primero en que se debe fijar, es en el intervalo de definición de la función $f(x)$ con que trabaje. Si el intervalo es $[-L, L]$ con $L \neq \pi$, NO SE LE OCURRA utilizar las expresiones (2.1), (2.5) y (2.6) porque su solución no será correcta. Aunque parezca ocioso hacer énfasis en este hecho, no lo es, ya que según la experiencia, muchos estudiantes cometen este error ¡en los exámenes!

2.2.2. Forma compleja de la serie de Fourier

Es posible e ilustrativo reescribir la serie de Fourier en forma compleja. Para ello reescribamos las funciones trigonométricas en la forma de Euler y substituyamoslas en la ecuación (2.1). Sin pérdida de generalidad consideraremos el caso en que la función tiene periodo 2π . La forma de Euler del $\sin nx$ y el $\cos nx$ es

$$\cos nx = \frac{1}{2}(e^{inx} + e^{-inx}) \quad \text{y} \quad \sin nx = \frac{1}{2i}(e^{inx} - e^{-inx}). \quad (2.23)$$

Sustituyendo estas expresiones en la serie de Fourier (2.1) obtenemos

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{a_n}{2}(e^{inx} + e^{-inx}) + \frac{b_n}{2i}(e^{inx} - e^{-inx}) \right] \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{2}(a_n - ib_n)e^{inx} + \frac{1}{2}(a_n + ib_n)e^{-inx} \right] = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx}], \end{aligned}$$

donde hemos definido $c_0 \equiv a_0/2$, $c_n \equiv (a_n - ib_n)/2$ y $c_{-n} \equiv (a_n + ib_n)/2$ en el último renglón. Note de estas definiciones que $c_{-n} = c_n^*$. Haciendo el cambio de índice $n \rightarrow -n$ en el último término, podemos reescribir la serie de Fourier en la forma

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}. \quad (2.24)$$

los coeficientes c_n pueden ser calculados de manera inmediata a partir de los coeficientes a_n y b_n , obteniendo

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2}(a_n - ib_n) = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx f(x) dx - i \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx f(x) dx \right], \\ \Rightarrow c_n &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx. \end{aligned} \quad (2.25)$$

En su curso de variable compleja usted estudio las series de Laurent de funciones de variable compleja z . La serie de Laurent es la representación de la función $f(z)$ en la forma de una serie de potencias, la cual incluye términos tanto de grado positivo como de grado negativo

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n z^n. \quad (2.26)$$

Si consideramos el círculo unitario, entonces $z = e^{i\phi}$ con $\phi \in [-\pi, \pi]$ y

$$f(z) = f(e^{i\phi}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n e^{in\phi}. \quad (2.27)$$

Comparando la forma compleja de la serie de Fourier (2.24), con la serie de Laurent sobre el círculo unitario (2.27), concluimos que

$$\text{Desarrollo de Laurent sobre el círculo unitario} \iff \text{Serie de Fourier compleja}$$

Ejemplo 2.2.2 *Obtenemos la serie de Fourier de la función escalón*

$$f(x) = \begin{cases} +1 & \text{si } 0 < x < \pi, \\ -1 & \text{si } -\pi < x < 0, \end{cases} \quad (2.28)$$

utilizando la representación compleja (2.24). Para ello calculemos los coeficientes c_n utilizando la ecuación (2.25)

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx = \frac{1}{2\pi} \left[- \int_{-\pi}^0 e^{-inx} dx + \int_0^{\pi} e^{-inx} dx \right] \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[- \frac{e^{-inx}}{(-in)} \Big|_{-\pi}^0 + \frac{e^{-inx}}{(-in)} \Big|_0^{\pi} \right] = \frac{1}{i\pi n} (1 - e^{-in\pi}) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ es par} \\ \frac{2}{i\pi n} & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases} \end{aligned}$$

Dado que los coeficientes son diferentes de cero únicamente si n es un número impar, $n = 2m + 1$ con $m \in \mathbb{Z}$, obtenemos finalmente que la serie de Fourier en forma compleja es

$$f(x) = \frac{2}{i\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2m+1} e^{i(2m+1)x}. \quad (2.29)$$

Esta serie debe ser completamente equivalente a la ecuación (2.22) en el caso en que $V = 1$ y $L = \pi$. Veamos que esto es así. De la serie de Fourier (2.29) tenemos que

$$f(x) = \frac{2}{i\pi} \sum_{m=-\infty}^{-1} \frac{1}{2m+1} e^{i(2m+1)x} + \frac{2}{i\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2m+1} e^{i(2m+1)x}.$$

Para que ambas sumas comiencen desde $m = 0$, es necesario modificar el índice en la primer suma. Haciendo el cambio de índice $m \rightarrow -(m+1)$ sólo en la primer suma obtenemos

$$\begin{aligned} f(x) &= -\frac{2}{i\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2m+1} e^{-i(2m+1)x} + \frac{2}{i\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2m+1} e^{i(2m+1)x}, \\ &= \frac{2}{i\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2m+1} (e^{i(2m+1)x} - e^{-i(2m+1)x}) = \frac{4}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\sin((2m+1)x)}{2m+1}. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Este resultado es consistente con la serie de Fourier (2.22).

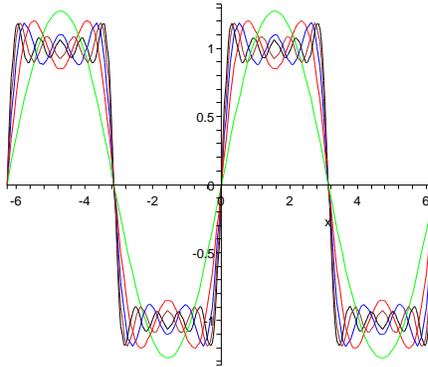


Figura 2.4: La figura muestra la gráfica de las primeras 5 sumas parciales de la serie de Fourier (2.30). S_0 se presenta en verde, S_1 en rojo, S_2 en azul, S_3 en café y S_4 en negro. Note que a medida que consideramos más términos, la suma parcial S_n se parece cada vez más a la función escalón de periodo 2π . Note también que en los puntos de discontinuidad, la serie converge a la media aritmética, por ejemplo $S(x=0) = 0$, $S(x=\pi) = 0$, etc.

2.2.3. El fenómeno de Gibbs

Cuando una función tiene una discontinuidad de salto en un punto, su serie de Fourier tiene un comportamiento especial en dicho punto. Este comportamiento se conoce como el fenómeno de Gibbs debido a que fué explicado en 1899 por J. Williard Gibbs. El fenómeno consiste en que cerca de la discontinuidad, las sumas parciales de la serie de Fourier mantienen unas oscilaciones que no se hacen pequeñas. Para ejemplificar este fenómeno consideremos el caso de la extensión periódica de la función escalón (de periodo 2π), estudiada en el ejemplo (2.2.2). Lo primero que podemos notar de su serie de Fourier (2.30), es que los términos son más pequeños en magnitud a medida que m aumenta (aquí estamos considerando que m es un número impar)

$$0 < \frac{|\sin mx|}{m} < \frac{1}{m} \Rightarrow \lim_{m \rightarrow \infty} \left(0 < \frac{|\sin mx|}{m} < \frac{1}{m} \right) \Rightarrow 0 < \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{|\sin mx|}{m} < 0,$$

de lo cual concluimos que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{|\sin mx|}{m} \rightarrow 0. \quad (2.31)$$

Deberíamos entonces obtener una mejor aproximación a la extensión periódica de la función escalón a medida que m aumenta. Escencialmente esta expectativa es correcta, excepto que existe una pequeña sutileza que uno podría haber previsto. Esto se ilustra mejor graficando las sumas parciales S_n para diferentes valores de n . En la figura (2.2.2) hemos graficado ya las primeras 5 sumas parciales. En la figura (2.2.3) mostramos una ampliación de dicha gráfica en el intervalo $[0, \pi]$

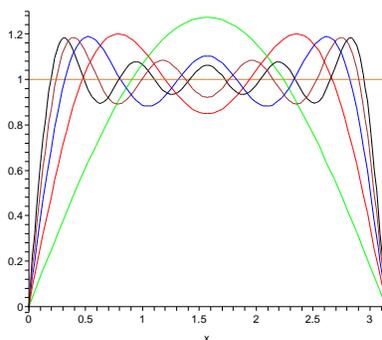


Figura 2.5: La figura muestra la gráfica de las sumas parciales S_0 a S_4 de la serie de Fourier de la función escalón en el intervalo $[0, \pi]$. S_0 se presenta en verde, S_1 en rojo, S_2 en azul, S_3 en café y S_4 en negro.

y en la figura (2.2.3) mostramos la gráfica para las sumas parciales S_{10} y S_{20} . Estas

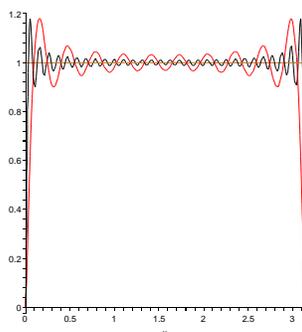


Figura 2.6: La figura muestra la gráfica de las sumas parciales S_{10} en rojo y S_{20} en negro.

gráficas representan una “prueba visual” del hecho de que la inclusión de más términos en las sumas parciales, produce una serie que se aproxima mejor a la función escalón. Sin embargo, una inspección mas detallada revela un posible problema. En los puntos de discontinuidad de la función, las series de Fourier muestran un pico seguido por oscilaciones rápidas. Cuando se considerarán más términos en la serie, las oscilaciones se vuelven más rápidas y más pequeñas, pero los picos no disminuyen, no importa cuantos términos incluyamos, las sumas parciales tienden a “dispararse” de los valores de la función próximos al punto de discontinuidad ⁴. Los valores de $f(x)$ en la discontinuidad por salto, se extienden a través del intervalo $[-1, 1]$, mientras los de la n -ésima suma parcial S_n , se

⁴Intuitivamente uno puede preguntarse si una función discontinua, como la función escalón, se puede expresar como una suma, aun si es infinita, de funciones continuas. Uno tiene que sospechar que de hecho no se puede. Esta pregunta le produjo a Fourier críticas de la academia de ciencia Francesa por muchos

extienden a través de un intervalo un tanto mayor $[-\alpha_n, \alpha_n]$. El valor límite de α_n cuando $n \rightarrow \infty$ determina lo que se conoce como el intervalo de Gibbs para $f(x)$. Nuestro objetivo es obtener una descripción precisa de este intervalo. El resultado que se obtiene es que siempre aparece un α_n que es aproximadamente 18% mayor del valor real de la función. Aunque no constituye una prueba de este resultado, en la figura (2.2.3) se muestra la amplificación de la figura (2.2.3) cerca de la discontinuidad. Como puede observarse, el valor del pico de la gráfica negra es muy cercano a 1.2, esto es, muy cercano al 20% mayor del valor de la función $f(x)$ en el mismo punto.

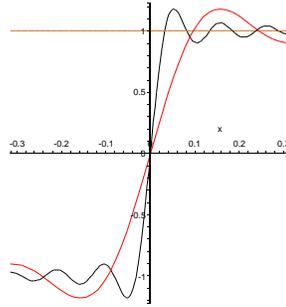


Figura 2.7: La figura muestra una amplificación de la figura (2.2.3) cerca del punto de discontinuidad $x = 0$.

Para mostrar analíticamente el fenómeno de Gibbs consideremos la suma parcial S_N definida como

$$\begin{aligned} S_N(x) &\equiv \sum_{n=-N}^N c_n e^{inx} = \sum_{n=-N}^N \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) e^{-iny} dy \right) e^{inx} \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-N}^N \left[- \int_{-\pi}^0 e^{in(x-y)} dy + \int_0^{\pi} e^{in(x-y)} dy \right] \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^0 \sum_{n=-N}^N e^{in(x-y)} dy + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \sum_{n=-N}^N e^{in(x-y)} dy. \end{aligned}$$

Haciendo el cambio de variable $m = n + N$ podemos reescribir el integrando en la forma

$$\sum_{n=-N}^N e^{in(x-y)} = \sum_{m=0}^{2N} e^{i(m-N)(x-y)} = e^{-iN(x-y)} \sum_{m=0}^{2N} e^{im(x-y)}.$$

años (Laplace, Legendre, y Lagrange formaban parte de los críticos). La respuesta correcta a esta pregunta tuvo que esperar la llegada de Gibbs.

Podemos reconocer esta última suma como una serie geométrica. Si hacemos $a = 1$ y $r = e^{i(x-y)}$ en la serie geométrica (1.11), obtenemos de (1.12) que la suma está dada por

$$\begin{aligned} e^{-iN(x-y)} \sum_{m=0}^{2N} e^{im(x-y)} &= e^{-iN(x-y)} \left[\frac{1 - e^{i(2N+1)(x-y)}}{1 - e^{i(x-y)}} \right] \\ &= \frac{e^{\frac{i}{2}(x-y)}}{e^{\frac{i}{2}(x-y)}} \left[\frac{e^{-i(N+\frac{1}{2})(x-y)} - e^{i(N+\frac{1}{2})(x-y)}}{e^{-\frac{i}{2}(x-y)} - e^{\frac{i}{2}(x-y)}} \right] = \frac{\sin \left[\left(N + \frac{1}{2} \right) (x - y) \right]}{\sin \left[\frac{1}{2} (x - y) \right]} \end{aligned}$$

con lo cual

$$S_N(x) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^0 \frac{\sin \left[\left(N + \frac{1}{2} \right) (x - y) \right]}{\sin \left[\frac{1}{2} (x - y) \right]} dy + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin \left[\left(N + \frac{1}{2} \right) (x - y) \right]}{\sin \left[\frac{1}{2} (x - y) \right]} dy.$$

Realizando el cambio de variable $\theta = x - y$ en la primer integral y $\theta = y - x$ en la segunda, obtenemos

$$\begin{aligned} S_N(x) &= -\frac{1}{2\pi} \int_{\pi+x}^x \frac{\sin \left[\left(N + \frac{1}{2} \right) \theta \right]}{\sin \left(\frac{1}{2} \theta \right)} (-d\theta) + \frac{1}{2\pi} \int_{-x}^{\pi-x} \frac{\sin \left[- \left(N + \frac{1}{2} \right) \theta \right]}{\sin \left[-\frac{1}{2} \theta \right]} d\theta \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int_x^{\pi+x} \frac{\sin \left[\left(N + \frac{1}{2} \right) \theta \right]}{\sin \left(\frac{1}{2} \theta \right)} d\theta + \frac{1}{2\pi} \int_{-x}^{\pi-x} \frac{\sin \left[\left(N + \frac{1}{2} \right) \theta \right]}{\sin \left(\frac{1}{2} \theta \right)} d\theta, \end{aligned}$$

pero

$$\int_{-x}^{\pi-x} - \int_x^{\pi+x} = \int_c^{\pi-x} - \int_c^{-x} - \int_c^{\pi+x} + \int_c^x = \int_{-x}^x - \int_{\pi-x}^{\pi+x},$$

con lo cual

$$S_N(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-x}^x \frac{\sin \left[\left(N + \frac{1}{2} \right) \theta \right]}{\sin \left(\frac{1}{2} \theta \right)} d\theta - \frac{1}{2\pi} \int_{\pi-x}^{\pi+x} \frac{\sin \left[\left(N + \frac{1}{2} \right) \theta \right]}{\sin \left(\frac{1}{2} \theta \right)} d\theta.$$

Finalmente si en esta ecuación realizamos el cambio de variable $u = \left(N + \frac{1}{2} \right) \theta$ obtenemos

$$S_N(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\left(N+\frac{1}{2}\right)x}^{\left(N+\frac{1}{2}\right)x} \frac{\sin u}{(2N+1) \sin \left(\frac{u}{2N+1} \right)} du - \frac{1}{\pi} \int_{-\left(N+\frac{1}{2}\right)(\pi-x)}^{\left(N+\frac{1}{2}\right)(\pi+x)} \frac{\sin u}{(2N+1) \sin \left(\frac{u}{2N+1} \right)} du.$$

Consideremos la suma parcial en la vecindad de la discontinuidad en $x = 0$ ($0 < x < \pi$). En el límite $x \rightarrow 0$, la segunda integral es mucho menor que la primera cuando $N \gg 1$. Para verificar esta afirmación notemos que el argumento de la función seno en el denominador de la primer integral va a cero, ya que

$$\begin{aligned} -\left(N + \frac{1}{2}\right)x \leq u \leq \left(N + \frac{1}{2}\right)x &\Rightarrow -\frac{\left(N + \frac{1}{2}\right)x}{2N+1} \leq \frac{u}{2N+1} \leq \frac{\left(N + \frac{1}{2}\right)x}{2N+1} \\ &\Rightarrow -\frac{x}{2} \leq \frac{u}{2N+1} \leq \frac{x}{2}. \end{aligned}$$

Así en el límite $x \rightarrow 0$ y $N \rightarrow \infty$

$$-\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{2} \leq \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{u}{2N+1} \leq \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{2} \Rightarrow 0 \leq \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{u}{2N+1} \leq 0 \Rightarrow \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{u}{2N+1} \rightarrow 0.$$

Como consecuencia de este resultado la función seno también va a 0 en este límite

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sin\left(\frac{u}{2N+1}\right) \rightarrow 0,$$

y el integrando va a

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\sin u}{(2N+1) \sin\left(\frac{u}{2N+1}\right)} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\frac{\sin u}{u}}{\frac{\sin\left(\frac{u}{2N+1}\right)}{\frac{u}{2N+1}}} \rightarrow \frac{\frac{\sin u}{u}}{1} = \frac{\sin u}{u}. \quad (2.32)$$

En el caso de la segunda integral, el argumento de la función seno en el denominador del integrando se encuentra en el intervalo

$$\frac{(N + \frac{1}{2})}{2N+1} (\pi - x) \leq \frac{u}{2N+1} \leq \frac{(N + \frac{1}{2})}{2N+1} (\pi + x) \Rightarrow \frac{\pi - x}{2} \leq \frac{u}{2N+1} \leq \frac{\pi + x}{2},$$

con lo cual en el límite $x \rightarrow 0$ y $N \rightarrow \infty$ obtenemos

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\pi - x}{2} \leq \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{u}{2N+1} \leq \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\pi + x}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{2} \leq \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{u}{2N+1} \leq \frac{\pi}{2}.$$

Concluimos así que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{u}{2N+1} \rightarrow \frac{\pi}{2} \Rightarrow \lim_{N \rightarrow \infty} \sin\left(\frac{u}{2N+1}\right) \rightarrow 1.$$

Este resultado es bastante diferente respecto al resultado anterior, ya que en este caso tenemos que el integrando

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\sin u}{(2N+1) \sin\left(\frac{u}{2N+1}\right)} \rightarrow \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\sin u}{2N+1} \rightarrow 0. \quad (2.33)$$

Esto muestra nuestra afirmación sobre el hecho de que en el límite $N \rightarrow \infty$ sólo la primer integral contribuye a S_N

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N(x) \approx \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-(N+\frac{1}{2})x}^{(N+\frac{1}{2})x} \frac{\sin u}{(2N+1) \sin\left(\frac{u}{2N+1}\right)} du = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin u}{u} du = 1. \quad (2.34)$$

Por lo tanto $S(x) \rightarrow 1$ cuando $0 < x < \pi$. Claramente de (2.34) se concluye que si, $-\pi < x < 0$, $S(x) \rightarrow -1$.

En el análisis que hemos realizado supusimos que, $0 < x < \pi$ y que x permanece fijo mientras $N \rightarrow \infty$. Supongamos ahora que estamos situados justo en el pico problemático

de la gráfica y queremos ver que pasa con este punto en el límite $N \rightarrow \infty$. ¿Cómo encontramos el valor δ de la coordenada x del pico? Este máximo lo podemos encontrar calculando $S'_N(x)$ y obteniendo el primer cero cuando x se incrementa a partir de 0. De las gráficas que hemos analizado se deduce que $x = \delta$ será un valor muy pequeño cuando N es grande.

En este caso nuevamente la segunda integral será despreciable respecto a la primera cuando $N \gg 1$, y así para un x positivo pequeño tenemos que

$$S_N(x) \approx \frac{1}{\pi} \int_{-(N+\frac{1}{2})x}^{(N+\frac{1}{2})x} \frac{\sin u}{u} du = \frac{2}{\pi} \int_0^{(N+\frac{1}{2})x} \frac{\sin u}{u} du. \quad (2.35)$$

Esta integral se puede expresar en términos de la integral Sine que se define como $Si(x) \equiv \int_0^x \frac{\sin u}{u} du$ ⁵. Sin embargo antes de estar en posición de evaluar esta integral, debemos encontrar el punto donde aparece el primer cero de S'_N , para ello debemos calcular $S'_N = \frac{dS_N(x)}{dx}$. Esta derivada queda determinada por el teorema fundamental del calculo

$$S'_N(x) = \frac{2}{\pi} \frac{d}{dx} \int_0^{(N+\frac{1}{2})x} \frac{\sin u}{u} du = \frac{2 \sin [(N + \frac{1}{2})] x}{\pi (N + \frac{1}{2}) x} \quad (2.36)$$

Imponiendo la condición $S'_N(x) = 0$ para obtener los ceros de la función, se tiene

$$S'_N(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \left(N + \frac{1}{2}\right) x = m\pi \quad \Rightarrow \quad x_m \equiv \delta_m = \frac{2m\pi}{2N + 1}. \quad (2.37)$$

El primer cero, que corresponde al primer máximo de la función y por tanto al pico bajo estudio se obtiene para el valor $m = 1$ ($\delta_1 \equiv \delta$). El valor $m = 2$ nos da el primer mínimo, el valor $m = 3$ el segundo máximo y así sucesivamente de manera alternada se obtienen los máximos y mínimos de la función. Sustituyendo el valor de δ en la expresión para $S_N(x)$ obtenemos

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N \left(\delta = \frac{2\pi}{2N + 1} \right) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin u}{u} du = \frac{2}{\pi} Si(\pi) = 1,1798 \quad (2.38)$$

Concluimos entonces que el primer pico excede el valor $f(x) = 1$ en alrededor del 18%, aún cuando $N \rightarrow \infty$. Note que la posición de este pico se acerca a cero cada vez más

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \delta = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{2\pi}{2N + 1} \rightarrow 0. \quad (2.39)$$

2.3. Problemas

1. Verifique las relaciones de ortogonalidad de las funciones trigonométricas $\sin(nx)$ y $\cos(nx)$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) \sin(mx) dx = \pi \delta_{nm}, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \cos(mx) dx = \pi \delta_{nm},$$

⁵En este curso no estudiaremos esta integral y para nuestros propósitos, bastará con obtener el valor deseado, consultando la literatura existente. Ver por ejemplo Arfken.

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) \cos(mx) dx = 0,$$

donde n y m son números enteros.

2. a) Muestre que si $f(x)$ es una función par y satisface la propiedad $f(x+L) = -f(x)$, su representación en serie de Fourier en el intervalo $(-L, +L)$ tiene solo términos cosenos de orden impar y se satisface la siguiente fórmula

$$a_{2m+1} = \frac{4}{L} \int_0^{L/2} f(x) \cos \frac{(2m+1)\pi x}{L} dx, \quad (m = 0, 1, 2, \dots).$$

b) ¿Cuál es la condición que se debe imponer sobre la función $f(x)$ para asegurar que su representación en serie de Fourier en el intervalo $(-L, +L)$ tenga solo términos cosenos de orden par.

c) Establezca un teorema similar al del inciso (a) para funciones impares.

3. Desarrollando la función $f(x) = \cosh ax$ en una serie de Fourier, muestre que

$$\cosh ax = \frac{\sinh a\pi}{a\pi} + \frac{2a \sinh a\pi}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + a^2} \cos nx, \quad (-\pi < x < \pi).$$

4. a) Utilizando la serie de Fourier de la función: $f(x) = x^2$, en el intervalo $-\pi < x < \pi$, muestre que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}.$$

b) Utilizando la serie de Fourier de la función

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x < \pi, \\ -x, & -\pi < x < 0, \end{cases}$$

muestre que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

5. Utilizando la serie de Fourier de la función $f(x) = x^4$, en el intervalo $-\pi < x < \pi$, muestre que:

a) la función zeta de Riemann $\zeta(4)$ es

$$\zeta(4) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90},$$

b) y que la función alternate

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^4} = \frac{7\pi^4}{720}.$$

6. Utilizando la serie de Fourier de la función

$$f(x) = \begin{cases} x(\pi - x), & 0 < x < \pi, \\ x(\pi + x), & -\pi < x < 0, \end{cases}$$

muestre que

$$f(x) = \frac{8}{\pi} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^3},$$

y muestre también que

$$\sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{(n-1)/2}}{n^3} = 1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \dots = \frac{\pi^3}{32}.$$

7. Utilizando la serie de Fourier de la función

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < \pi, \\ -1, & \pi < x < 2\pi, \end{cases}$$

muestre la fórmula de Leibnitz para π

$$\sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{(n-1)/2}}{n} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots = \frac{\pi}{4}.$$

8. Si una función real $f(x) = f^*(x)$, se desarrolla en una serie de Fourier exponencial

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx},$$

¿Qué restricción induce la condición de realidad sobre los coeficientes c_n ?

9. Una cuerda cuyos extremos están anclados en $x = 0$ y en $x = l$, vibra libremente. Su movimiento está descrito por la ecuación de onda

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}.$$

Suponga un desarrollo de Fourier de la forma

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) \sin \frac{n\pi x}{l},$$

y encuentre los coeficientes $b_n(t)$. Las condiciones iniciales son

$$u(x, 0) = f(x) \quad \text{y} \quad \frac{\partial}{\partial t} u(x, 0) = g(x).$$

12. a) Muestre que el desarrollo de Fourier del $\cos ax$ es

$$\cos ax = \frac{2a \sin a\pi}{\pi} \left(\frac{1}{2a^2} - \frac{\cos x}{a^2 - 1^2} + \frac{\cos 2x}{a^2 - 2^2} - \dots \right),$$

esto es, los coeficientes diferentes de cero en la serie son

$$a_n = (-1)^n \frac{2a \sin a\pi}{\pi(a^2 - n^2)}.$$

b) Del resultado anterior muestre que

$$a\pi \cot a\pi = 1 - 2 \sum_{p=1}^{\infty} \zeta(2p) a^{2p}.$$

Esta ecuación nos da una relación entre la función zeta de Riemann y los números de Bernoulli.

13. Obtenga el desarrollo en serie de Fourier de la función delta de Dirac en el intervalo $-\pi < x < \pi$.

a) ¿Qué significado se le puede atribuir al término constante?

b) ¿En que región es válida esta representación?

El siguiente problema no es de Series de Fourier, pero esta integral aparece varias veces en el curso. Por tal motivo es conveniente conocer su valor.

12. Calcule utilizando el método que más le agrade, la integral

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx.$$

3

Ecuaciones de la Física

Uno de los objetivos del curso es obtener las soluciones de algunas ecuaciones diferenciales que aparecen en los cursos de Mecánica Clásica, Electrodinámica, Mecánica Cuántica, etc. En particular estamos interesados en entender las propiedades y estructura de las soluciones. Este capítulo lo dedicamos a dar el primer paso para lograr el objetivo. Comenzaremos observando que las ecuaciones de movimiento de la Física son ecuaciones diferenciales parciales de segundo orden y discutiremos algunas de sus características. Una vez familiarizados con las ecuaciones que nos interesa resolver, el siguiente paso será comenzar a resolverlas. Las solución final a cada una de las ecuaciones la obtendremos en los capítulos siguientes, pero en éste pondremos la primera piedra para lograrlo.

Las ecuaciones diferenciales parciales involucran más de una variable independiente, y por este motivo, son mucho más difíciles de resolver que las ecuaciones diferenciales ordinarias, las cuales involucran sólo una variable independiente. Para resolver una ecuación diferencial parcial sólo se conocen dos métodos generales de solución¹, la *solución integral* y la *solución separable*. El método de soluciones integrales tiene la ventaja de que es un método muy general, ya que usualmente la integral es invariante ante transformaciones de coordenadas, sin embargo estas soluciones no son siempre las más satisfactorias, porque en muchos casos la integral no se puede evaluar en forma cerrada y por tanto es extremadamente difícil obtener valores numéricos. A pesar de la importancia de este método, en el curso no nos ocuparemos de él, debido a las constricciones de tiempo que tenemos.

El método alternativo para resolver ecuaciones diferenciales parciales lineales es el método de separación, el cual consiste en factorizar o separar la ecuación original de varias

¹De manera adicional se conocen algunos casos donde se adivina la solución y después se verifica que en realidad es solución. Sin embargo no existe un método sistemático de “adivinación”.

variables independientes, en un conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias, donde cada una de ellas involucra justamente sólo una variable independiente. Esta técnica no es tan universal como el método integral, ya que la separación debe ser diferente, para sistemas de coordenadas diferentes, como consecuencia, la separación *sólo se puede realizar para pocos sistemas coordinados*. Pero cuando el método se puede utilizar, es de gran utilidad, dado que es mucho más fácil obtener soluciones de las ecuaciones diferenciales ordinarias que de las ecuaciones diferenciales parciales. Como ejemplo aplicaremos el método de separación a la ecuación de Helmholtz en 2D, 3D y en diferentes sistemas de coordenadas ².

El capítulo está organizado como sigue: en la clase 7 discutimos las ecuaciones de la física y damos una introducción muy breve a la Mecánica Cuántica. En la clase 8 discutimos el método de separación de variables en 2D y en la clase 9 en 3D. En particular discutiremos la separación de la ecuación de Helmholtz en coordenadas cartesianas, esféricas y cilíndricas en 3D.

3.1. Clase 7

3.1.1. Ecuaciones de la Física Teórica

Es un hecho fenomenológico que la mayoría de las ecuaciones fundamentales que surgen en la física son ecuaciones diferenciales de segundo orden en las derivadas.

Las derivadas pueden ser de dos tipos:

- *derivadas espaciales*: $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$, $\frac{\partial}{\partial z}$, ∇
- *derivadas temporales*: $\frac{\partial}{\partial t}$.

Las ecuaciones diferenciales contienen dos tipos de variables:

- *variables independientes*: t , x , y y z ,
- *variables dependientes*: $\phi(t, x, y, z)$ potencial *escalar* en electrodinámica,
 $\vec{A}(t, x, y, z)$ potencial vectorial en electrodinámica,
 $\psi(t, x, y, z)$ función de onda en mecánica cuántica, etc.

El comportamiento de las variables dependientes o campos, está gobernado por las ecuaciones diferenciales de la física.

Una gran número de problemas físicos están formulados en términos de ecuaciones diferenciales que involucran funciones de más de una variable, conocidas como *ecuaciones*

²Le informamos a l@/al lector@ que la notación 2D la utilizamos como abreviación de 2-Dimensiones, 3D de 3-Dimensiones, etc.

diferenciales parciales. A continuación enlistamos varios ejemplos de ecuaciones diferenciales de la física:

- *Ecuación de Laplace:*

$$\nabla^2 \Psi = 0. \quad (3.1)$$

Recuerde que en su curso de Cálculo de varias variables, usted aprendió que el operador laplaciano en coordenadas cartesianas, está dado por:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \Psi &= \nabla \cdot (\nabla \Psi) = \nabla \cdot \left(\hat{i} \frac{\partial \Psi}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial \Psi}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right) \\ &= \left(\hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \left(\hat{i} \frac{\partial \Psi}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial \Psi}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right) = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

En este capítulo trataremos con el operador Laplaciano también en coordenadas esféricas y cilíndricas.

La ecuación de Laplace aparece en muchas áreas de la física, por ejemplo en:

- Fenómenos electromagnéticos incluyendo: electrostática, dieléctricos, corrientes estacionarias, magnetostática.
- Hidrodinámica: flujo irrotacional de un fluido perfecto y ondas superficiales.
- Flujo de calor.
- Gravitación Newtoniana.

- *Ecuación de Poisson:*

$$\nabla^2 \Psi = -\rho. \quad (3.3)$$

Note que en el lenguaje de ecuaciones diferenciales, la ecuación de Laplace es la ecuación homogénea y la ecuación de Poisson es la ecuación inhomogénea con un término de fuente: $-\rho$.

- Fenómenos electromagnéticos incluyendo: electrostática, dieléctricos, corrientes estacionarias, magnetostática.
- *Ecuación de Helmholtz* (o ecuación de onda), la cual corresponde al signo (+), y la ecuación de difusión independiente del tiempo (la cual corresponde al signo (-)).

$$\nabla^2 \Psi \pm k^2 \Psi = 0. \quad (3.4)$$

- Ondas elásticas en sólidos incluyendo cuerdas vibrantes, membranas vibrantes etc.
- Sonido o acústica.
- Ondas electromagnéticas.
- Reactores nucleares.

- Ecuación de difusión dependiente del tiempo.

$$\nabla^2 \psi = \frac{1}{a^2} \frac{\partial \psi}{\partial t}. \quad (3.5)$$

y su generalización 4D donde el operador laplaciano se cambia por el operador d'Alambertiano

$$\nabla^2 \rightarrow \square^2 = \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

- Ecuación de onda dependiente del tiempo:

$$\square^2 \Psi = 0. \quad (3.6)$$

- Ecuación del potencial escalar:

$$\square^2 \Psi = -\rho. \quad (3.7)$$

- Ecuación de Klein-Gordon:

$$\square^2 \Psi = m^2 \Psi. \quad (3.8)$$

De estas tres últimas ecuaciones también se tiene su generalización vectorial, donde $\Psi \rightarrow \vec{V} = (V_x, V_y, V_z)$.

- La ecuación de onda de Schrödinger:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi + V\Psi = i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t}, \quad \leftarrow \text{ caso dependiente del tiempo,} \quad (3.9)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi + V\Psi = E\Psi, \quad \leftarrow \text{ caso independiente del tiempo.} \quad (3.10)$$

- Ecuaciones de Maxwell:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{D} &= 4\pi\rho, & \nabla \cdot \vec{B} &= 0, \\ \nabla \times \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= 0, & \nabla \times \vec{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} &= \frac{4\pi}{c} \vec{J} \end{aligned} \quad (3.11)$$

- Ecuación de Dirac:

$$\left(i\hbar \gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} - mc \right) \Psi(t, x, y, z) = 0. \quad (3.12)$$

Todas estas ecuaciones se pueden escribir en la forma:

$$\mathcal{O}\Psi = F, \quad (3.13)$$

en la cual \mathcal{O} es un operador diferencial

$$\mathcal{O} = \mathcal{O} \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial t}, x, y, z, t, \dots \right),$$

F es una función conocida,

Ψ es el campo que no conocemos y queremos determinar.

3.1.2. Propiedades de las ecuaciones

Existen dos propiedades de las ecuaciones de la física de nuestro interés, que deseamos resaltar: *la linealidad* y su característica de ser *ecuaciones de segundo orden*.

Comencemos notando que todas las ecuaciones que hemos mencionado, son lineales en la variable dependiente Ψ . ¿Cuál es la razón física de esto?

El hecho es que los campos Ψ en estas ecuaciones no actúan como fuentes de ellos mismos. Por ejemplo en el electromagnetismo los campos eléctricos y magnéticos responden a las fuentes que los crean, pero ellos mismos no actúan como fuentes, los campos mismos no están “cargados”, esto es, los electrones y otras partículas que portan carga actúan como fuentes, mientras que el fotón mismo es neutro. De hecho existen generalizaciones *no lineales* de la teoría de Maxwell, conocidas como teorías de Yang-mills, las cuales juegan un papel fundamental en la descripción de las fuerzas nucleares fuerte y débil. Esto sucede porque precisamente los campos de Yang-Mills mismos portan el tipo de carga generalizada.

Otra teoría fundamental que no tiene ecuaciones de movimiento lineales es la gravedad, descrita por la teoría general de la relatividad de Einstein. La razón es muy similar, todas las formas de energía (masa) actúan como una fuente de la gravedad, de donde se obtiene la no-linealidad. En el límite Newtoniano el campo gravitacional se asume como muy débil y toda la no-linealidad desaparece.

Otras ecuaciones no-lineales que aparecen en la física son:

- Ondas de choque.
- Las ecuaciones fundamentales de la física atmosférica.
- Fenómenos de turbulencia. etc.

Sin embargo el análisis de estas ecuaciones sale del objetivo del curso.

Respecto a la segunda propiedad, note que las ecuaciones enlistadas son ecuaciones diferenciales de segundo orden en las derivadas de al menos una de las variables independientes (las ecuaciones de Maxwell (3.11) y la ecuación de Dirac (3.12) son ecuaciones de primer orden, pero involucran 2 funciones desconocidas, y al eliminar una de ellas obtenemos una ecuación diferencial de segundo orden).

Ocasionalmente en física se encuentran ecuaciones de orden superior.

- Teoría del movimiento lento de un fluido viscoso.
- Teoría de un cuerpo elástico.

$$(\nabla^2)^2 \Psi = \left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} \right) \Psi = 0. \quad (3.14)$$

Las soluciones a estas ecuaciones también quedan fuera de los objetivos del curso.

3.1.3. Mecánica Cuántica

La *mecánica cuántica*³ es la descripción del comportamiento de la materia y de la luz en todos sus detalles y, en particular, de los acontecimientos en la escala atómica. Los *objetos* a esta escala se comportan de una manera muy diferente a lo que usted aprendió en sus cursos de Mecánica Clásica.

Por ejemplo, Newton pensaba que la luz estaba compuesta de partículas, pero luego se descubrió que ésta se comporta como una ¡onda! Sin embargo, a principios del siglo XX, se descubrió que la luz algunas veces se comporta verdaderamente como una ¡partícula! Renunciando a ambos conceptos uno dice que: la luz no es como ninguna de las dos. Pero a la luz, no es a la única que le sucede ésto, resulta que el comportamiento cuántico de los objetos atómicos (electrones, protones, neutrones, fotones, etc.) es el mismo para todos, esto es ¡no son ni ondas ni partículas!

La diferencia fundamental entre la Mecánica Newtoniana y la Mecánica Cuántica reside en lo que estas teorías describen. La Mecánica Clásica estudia el movimiento de una partícula bajo la influencia de fuerzas aplicadas, y da por hecho que se pueden medir magnitudes como la posición, masa, velocidad, aceleración, etc., de la partícula. Esta suposición es válida en nuestra experiencia cotidiana, y la Mecánica Clásica proporciona la explicación “correcta” del comportamiento de los cuerpos en movimiento, en el sentido de que los valores predichos por magnitudes observables concuerdan con los valores medidos.

La Mecánica Cuántica trata igualmente de las relaciones entre magnitudes observables, pero el principio de incertidumbre de Heisenberg⁴ altera radicalmente la definición de “magnitud observable” en la escala atómica. De acuerdo con este principio, la posición y el momentum de una partícula no se pueden medir simultáneamente con precisión, mientras que en Mecánica Clásica se supone que ambas tienen un valor definido y verificable en cada instante. Las cantidades cuyas relaciones busca la Mecánica Cuántica son *probabilidades*. Por ejemplo, en el estudio del átomo de Hidrógeno, en vez de afirmar que el radio de la órbita del electrón en el estado fundamental del átomo, es siempre exactamente igual a $5,3 \times 10^{-11} \text{m}$, la Mecánica Cuántica afirma que éste es el radio más probable; si realizamos un experimento adecuado, la mayor parte de las veces dará un valor distinto, más grande o más pequeño, pero el valor más probable será aproximadamente $5,3 \times 10^{-11} \text{m}$.

Existen al menos tres formulaciones equivalentes de la Mecánica Cuántica que usted estudiará en sus cursos, la formulación de Schrödinger u ondulatoria, la formulación de Heisenberg o matricial y la formulación de Feynman o de integrales de trayectoria. En lo

³Como usted sabe, el curso de FETI es un requisito para cursar Mecánica Cuántica. La razón de esta seriación es que en FETI usted debe aprender a resolver varias de las ecuaciones diferenciales que aparecerán en su curso de Mecánica Cuántica. Dado que algunos ejemplos que veremos en este curso son ejemplos de Mecánica Cuántica, es conveniente dar una introducción breve a la Mecánica Cuántica. Debemos enfatizar que este no es un curso de Mecánica Cuántica y por tal motivo dejaremos de lado la interpretación física de los problemas, así como la justificación del uso de la ecuación básica. Todo esto será discutido en detalle el próximo trimestre cuando usted curse Mecánica Cuántica.

⁴Este principio lo discutiremos en detalle en el capítulo sobre: Transformada de Fourier.

que sigue sólo discutiremos la formulación de Schrödinger, que es la que comúnmente se enseña primero en el curso de Mecánica Cuántica.

En la formulación de Schrödinger se *postula* que un objeto cuántico tiene asociada una *función de onda* $\Psi(t, \vec{r})$. Esta función no tiene una interpretación física pero ¡contiene toda la información física asociada al sistema! Dicho esto queda claro que las preguntas importantes son: ¿Cómo obtenemos Ψ ? y ¿Cómo le extraemos la información física a Ψ ? La Mecánica Cuántica responde a estas preguntas a través de más *postulados*. Los postulados no se deducen ni se demuestran, históricamente ellos se construyeron para dar un marco teórico coherente a los fenómenos atómicos conocidos. No mencionaremos todos los postulados que forman la Mecánica Cuántica, sino sólo aquellos que nos serán de utilidad para lograr nuestros objetivos en el curso. La respuesta a la pregunta sobre como determinar la función de onda Ψ para un cuerpo, cuando su libertad de movimiento está limitada por la acción de fuerzas externas, la da el siguiente postulado:

Postulado 3.1.1 *La ecuación básica de la Mecánica Cuántica es*

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\Psi(x)}{dx^2} + V(x)\Psi(x) = E\Psi(x), \quad \text{Ecuación de Schrödinger,} \quad (3.15)$$

donde \hbar es una constante fundamental de la física, m la masa asociada al objeto, $V(x)$ es una función potencial y E es la energía del objeto.

Note que esta ecuación es una ecuación diferencial lineal de segundo orden, tal y como lo son las ecuaciones de la física. Esta ecuación no depende del tiempo y por tal motivo se le llama *estacionaria*. Desde luego, existe una versión dependiente del tiempo de esta ecuación, pero para los propósitos de este curso, nos basta con la ecuación estacionaria. Note también que (3.15) es una ecuación en 1D (sólo depende de x). Desde luego también existe la versión tridimensional de esta ecuación, cuya exposición pospondremos por ahora.

La respuesta a la pregunta sobre como extraer la información física contenida en la función de onda, nos la da el siguiente postulado:

Postulado 3.1.2 *El cuadrado del valor absoluto $|\Psi(t, \vec{r})|^2$ calculado en un punto \vec{r} y en un instante de tiempo determinado t , es proporcional a la probabilidad de encontrar experimentalmente al objeto ahí y en ese instante.*

Así en Mecánica Cuántica los problemas se reducen a resolver la ecuación de Schrödinger (3.15) e interpretar la función de onda correctamente. En el lenguaje que usted aprendió en sus cursos de Álgebra Lineal, resolver la ecuación de Schrödinger puede verse como un problema de valores y vectores propios. En este caso las energías E de la partícula⁵ son los valores propios⁶ y las funciones de onda Ψ los vectores propios⁷.

⁵Aunque hemos dicho que en realidad en Mecánica Cuántica no tenemos ni partículas ni ondas, es común encontrar en los libros la denominación partícula, para referirse a los objetos cuánticos. Nosotros utilizaremos esta nomenclatura, confiados en que usted entiende las sutilezas que hemos discutido al respecto.

⁶También se encuentra en la literatura los nombres, eigenvalores o valores característicos.

⁷También se les conoce como vectores propios o vectores característicos.

Matemáticamente la ecuación de Schrödinger acepta algunas soluciones que no son físicamente aceptables. Para discernir entre las soluciones que son aceptables y las que no lo son hay que imponer criterios adicionales sobre la función de onda. Uno de estos criterios es que la integral de su valor absoluto al cuadrado, converja, esto es

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\Psi|^2 dx < \infty. \quad (3.16)$$

Este requisito puede entenderse de manera sencilla. Dado que $|\Psi|^2$ es proporcional a la probabilidad de encontrar el objeto descrito por Ψ , la integral de $|\Psi|^2$ sobre todo el espacio debe ser finita, ya que el objeto está en alguna parte. Si la integral es 0, el cuerpo no existe. La integral no puede ser ∞ y tener cierto significado, así la única posibilidad es que la integral sea una cantidad finita para que Ψ describa apropiadamente al objeto. Técnicamente las funciones que satisfacen la propiedad (3.16) se dice que son de cuadrado integrable.

Dos postulados adicionales que deseamos mencionar y sobre los que abundaremos en los ejemplos son los siguientes:

Postulado 3.1.3 *Los únicos resultados que se pueden obtener al medir la energía de un sistemas, están dados por los valores propios de la ecuación de Schrödinger (3.15).*

Postulado 3.1.4 *La función de onda más general posible de un sistema físico es una combinación lineal de las funciones propias de la ecuación de Schrödinger.*

Para finalizar veamos que la ecuación de Schrödinger en el caso en que $V(x) = V = cte.$, se puede reescribir como una ecuación tipo Helmholtz. De (3.15) vemos que si multiplicamos toda la ecuación por $(-2m/\hbar^2)$ y restamos en ambos lados de la ecuación el término proporcional a E obtenemos

$$\frac{d^2\Psi(x)}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} (E - V) \Psi(x) = 0.$$

Definiendo $\lambda \equiv \frac{2m}{\hbar^2} (E - V)$ obtenemos finalmente

$$\frac{d^2\Psi(x)}{dx^2} + \lambda\Psi(x) = 0. \quad (3.17)$$

En esta ecuación λ puede ser un número real positivo, negativo o 0^8 . Nuestro objetivo será resolver esta ecuación.

⁸Seguramente usted está pensando que el caso $\lambda < 0$ no es físicamente admisible, ya que $\lambda < 0 \Rightarrow E < V$, lo cual nos lleva en Mecánica Clásica a energías cinéticas negativas o equivalentemente a velocidades complejas. Como consecuencia en Mécanica Clásica el caso $E < V$ no es admisible ¡Pero en Mecánica Cuántica sí!

3.1.4. Ecuación tipo Helmholtz en 1D

Consideremos la ecuación diferencial ordinaria

$$\frac{d^2\Phi(x)}{dx^2} + \lambda\Phi(x) = 0, \quad (3.18)$$

donde λ es una constante ⁹. La solución a esta ecuación depende del valor de la constante λ . Las soluciones serán funciones hiperbólicas si $\lambda < 0$, funciones trigonométricas si $\lambda > 0$ y una función lineal si $\lambda = 0$

$$\Phi(x) = \begin{cases} A_1 \sinh(x\sqrt{-\lambda}) + A_2 \cosh(x\sqrt{-\lambda}), & \text{si } \lambda < 0, \\ B_1 \sin(x\sqrt{\lambda}) + B_2 \cos(x\sqrt{\lambda}), & \text{si } \lambda > 0, \\ C_1x + C_2, & \text{si } \lambda = 0, \end{cases} \quad (3.19)$$

donde A_i , B_i y C_i con $i = 1, 2$, son constantes de integración. Algunas veces usted también encontrará en la literatura estas soluciones escritas en términos de funciones exponenciales

$$\Phi(x) = \begin{cases} D_1e^{x\sqrt{-\lambda}} + D_2e^{-x\sqrt{-\lambda}}, & \text{si } \lambda < 0, \\ F_1e^{ix\sqrt{\lambda}} + F_2e^{-ix\sqrt{\lambda}}, & \text{si } \lambda > 0, \end{cases} \quad (3.20)$$

donde D_i y F_i con $i = 1, 2$, son constantes de integración. Ambas soluciones son completamente equivalentes y utilizar una u otra es cuestión de gustos o de conveniencia. Desde luego existe una relación entre las A_i y las D_i , y entre las B_i y F_i .

En sus cursos de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias usted aprendió, que para obtener una solución específica a un problema dado, gobernado por una ecuación diferencial, se deben especificar las condiciones de borde o frontera. Una de las condiciones de frontera que aparecen con más frecuencia en física son las llamadas condiciones de Dirichlet. Estas condiciones nos requieren que la solución de la ecuación diferencial se anule simultáneamente en dos puntos dados, por ejemplo, en $x = 0$ y $x = L$, esto es,

$$\Phi(0) = \Phi(L) = 0. \quad (3.21)$$

Es directo mostrar la siguiente propiedad:

Propiedad 3.1.5 *Las condiciones de Dirichlet se satisfacen única y exclusivamente en el caso $\lambda > 0$. En los casos $\lambda \leq 0$, sólo se puede satisfacer una de las condiciones (3.21), pero no ambas a la vez.*

Mostremos esta propiedad

⁹A este punto consideramos a la ecuación diferencial como dada, sin relación alguna con ninguna teoría física particular. Hacemos esto porque la ecuación aparece no sólo en Mecánica Cuántica, sino también en Mecánica Clásica, Electrodinámica, etc.

- Caso $\lambda = 0$.

Si $\lambda = 0$, la solución es: $\Phi(x) = C_1x + C_2$. Para que esta solución satisfaga la condición $\Phi(0) = 0$, debe suceder que $C_2 = 0$. Concluimos entonces que $\Phi(x) = C_1x$ satisface la condición $\Phi(0) = 0$.

Si ahora queremos que simultáneamente se satisfaga la solución $\Phi(L) = 0$, entonces debe suceder que $\Phi(L) = C_1L = 0 \Rightarrow C_1 = 0$, con lo cual debemos concluir que $\Phi(x) = 0$. Esto es, $\Phi(x)$ no satisface las condiciones de Dirichlet (3.21) simultáneamente. Se deja al lector obtener el caso donde $\Phi(x)$ satisface la condición $\Phi(L) = 0$, y muestre nuevamente que no se satisfacen las dos condiciones simultáneamente.

- Caso $\lambda < 0$.

En este caso la solución es: $\Phi(x) = A_1 \sinh(x\sqrt{-\lambda}) + A_2 \cosh(x\sqrt{-\lambda})$. Para que esta solución satisfaga la condición $\Phi(0) = 0$, debe suceder que $A_2 = 0$, ya que $\sinh 0 = 0$ y $\cosh 0 = 1$. Concluimos entonces que $\Phi(x) = A_1 \sinh(x\sqrt{-\lambda})$ satisface la condición $\Phi(0) = 0$. Ahora si queremos que adicionalmente $\Phi(L) = A_1 \sinh(L\sqrt{-\lambda}) = 0$, debe suceder que $A_1 = 0$, con lo cual al igual que en el caso anterior $\Phi(x) = 0$, concluyendo que $\Phi(x)$ no satisface las condiciones de Dirichlet (3.21) simultáneamente. Se deja al lector obtener el caso donde $\Phi(x)$ satisface la condición $\Phi(L) = 0$, y muestre que esta solución no satisface las dos condiciones simultáneamente.

- Caso $\lambda > 0$.

En este caso la solución es $\Phi(x) = B_1 \sin(x\sqrt{\lambda}) + B_2 \cos(x\sqrt{\lambda})$. Imponiendo la condición $\Phi(0) = 0$, obtenemos que $B_2 = 0$, ya que $\sin 0 = 0$ y $\cos 0 = 1$. Así la solución es de la forma

$$\Phi(x) = B \sin(x\sqrt{\lambda}), \quad (3.22)$$

donde hemos eliminado el subíndice 1 de la constante B, dado que sólo tenemos esta constante. Imponiendo la segunda condición de manera simultanea obtenemos

$$\Phi(L) = B \sin(L\sqrt{\lambda}) = 0 \quad \Rightarrow \quad L\sqrt{\lambda} = n\pi, \text{ en principio con } n \in \mathbb{Z} - \{0\}.$$

De lo cual concluimos que

$$\sqrt{\lambda} = \frac{n\pi}{L}, \quad \text{o equivalentemente} \quad \lambda = \frac{n^2\pi^2}{L^2}, \quad (3.23)$$

y la solución adquiere la forma final

$$\Phi(x) = B \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right). \quad (3.24)$$

A este punto es importante enfatizar lo siguiente, note que la solución (3.19) de la ecuación diferencial (3.18) es válida para *cualquier* valor de $\lambda > 0$. Pero al imponer las condiciones de Dirichlet, la solución (3.24) sólo es válida para ciertos valores de λ . Estos valores según

(3.23) pertenecen a un conjunto infinito, de valores discretos. Este hecho lo encontraremos muchas veces a lo largo del curso para otras ecuaciones diferenciales. En el lenguaje del Algebra Lineal, los valores permitidos (3.23) de la constante λ son los valores propios de la ecuación y las funciones (3.24) son las funciones propias.

Existe un punto muy importante aún por discutir. Cuando resolvemos ecuaciones diferenciales queremos obtener todas las soluciones que sean linealmente independientes. Usted aprendió en su curso de Cálculo que la función seno es una función impar: $\sin(-x) = -\sin x$. Mirando la solución (3.24) notamos inmediatamente que debido a esta propiedad de paridad, obtendremos la misma solución para un número $n > 0$, que para su inverso aditivo $-n$, ya que

$$\Psi_{-n}(x) = B \sin\left(\frac{-n\pi x}{L}\right) = -B \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = B' \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \propto \Psi_n(x). \quad (3.25)$$

Concluimos entonces que basta con que n tome valores en los números naturales. Adicionalmente, dado que obtenemos una función propia diferente para cada valor de n , es común etiquetar las funciones propias con el índice n . Lo mismo sucede para los valores propios. Escribimos así las funciones propias y los valores propios de la ecuación (3.18), sujetas a las condiciones de Dirichlet (3.21), en el caso $\lambda > 0$ como:

$$\Psi_n(x) = B \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad \lambda_n = \frac{n^2 \pi^2}{L^2}. \quad (3.26)$$

3.1.5. Problemas de Mecánica Cuántica en 1D

Para ilustrar la aplicación de lo visto hasta ahora en problemas sencillos de física, presentamos dos ejemplos de Mecánica Cuántica en 1D.

Ejemplo 3.1.6 *Partícula en una caja.*

Este es el primer problema que se resuelve usualmente en el curso de Mecánica Cuántica. Debido a su importancia y sencillez, discutámoslo aquí.

Considere una partícula en una dimensión, restringida a viajar a lo largo del eje x entre $x = 0$ y $x = L$, por paredes infinitamente duras. Una partícula no pierde energía cuando choca contra estas paredes, de modo que su energía total permanece constante. Desde el punto de vista formal de la Mecánica Cuántica, la energía potencial V de la partícula es infinita a ambos lados de la caja, mientras que V es constante (por conveniencia igual a 0) en el interior. Ya que la partícula no puede tener una cantidad infinita de energía, no puede existir fuera de la caja, y así su función de onda es: $\Psi(x) = 0$ para $x \leq 0$ y $x \geq L$. Nuestro objetivo es encontrar el valor de $\Psi(x)$ dentro de la caja, es decir para $x \in [0, L]$. La ecuación de Schrödinger (3.15) para este problema es

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \Psi(x)}{dx^2} = E \Psi(x), \quad \text{sujeta a las condiciones: } \Psi(0) = \Psi(L) = 0. \quad (3.27)$$

Estamos considerando $V = 0$ dentro de la caja ¡Pero ya hemos resuelto el problema! la solución es (3.26) con $\lambda = 2mE/\hbar^2$. Concluimos entonces que las funciones propias y los valores propios de la ecuación (3.27) son

$$\Psi_n(x) = B \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad \text{y} \quad E_n = \frac{\hbar^2 n^2 \pi^2}{2mL^2} \quad \text{con: } n \in \mathbb{N}. \quad (3.28)$$

¿Cómo interpreta la Mecánica Cuántica este resultado? Según el postulado 3.1.3 se dice que la energía de la partícula sólo puede tener ciertos valores o niveles de energía E_n , donde al número n se le llama número cuántico. Esto es ¡Una partícula en el interior de una caja no puede tener una energía arbitraria! El hecho de que la partícula esté confinada da lugar a restricciones en su función de onda que le permiten tener solamente las energías determinadas mediante (3.28).

Es significativo que la partícula no pueda tener energía cero; si la tuviera, la función de onda Ψ tendría que ser cero en cualquier lugar de la caja y esto significa que la partícula no podría estar allí presente. La exclusión del valor $E = 0$ como un valor posible para la energía de una partícula encerrada, lo mismo que la limitación de E a un conjunto de valores discretos, es un resultado de la Mecánica Cuántica que no tiene contrapartida en la Mecánica Clásica, donde todas las energías, incluyendo el cero son posibles.

Finalmente del postulado 3.1.4 concluimos que la función de estado más general posible para una partícula en una caja es

$$\Psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right). \quad (3.29)$$

Pero esto no es otra cosa que ¡la serie de Fourier del estado $\Psi(x)$! Compare con la ecuación (2.19).

Ejemplo 3.1.7 Partícula en un círculo.

Como segundo ejemplo consideremos una partícula en una dimensión, restringida a moverse a lo largo de una circunferencia. En el lenguaje utilizado en el ejemplo 1.2.7, la partícula está restringida a moverse en el volumen de S^1 . Como no existe fuerza actuando sobre la partícula, podemos considerar que $V = 0$. Como el problema es en una dimensión, entonces la partícula debe obedecer la misma ecuación de Schödinger que la partícula en la caja, pero la condición de frontera debe ser diferente. Si S^1 tiene radio R , entonces el volumen de $S^1(R)$ es: $2\pi R$. Físicamente si la partícula se encuentra en el punto x o $x + 2\pi R$, no debería cambiar ninguna propiedad física. Esta situación física se traduce a una condición de periodicidad sobre la función de onda, para la cual imponemos que: $\Phi(x) = \Phi(x + 2\pi R)$. A las funciones que satisfacen esta condición a veces se les llama funciones univaluadas, ya que esta condición implica que la función de onda $\Phi(x)$ vale lo mismo para el punto x y todos los puntos que difieren de x en un múltiplo entero de 2π . Matemáticamente tenemos entonces que la partícula queda descrita por la función de

onda $\Phi(x)$ que satisface la ecuación de Schrödinger

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\Phi(x)}{dx^2} = E\Phi(x), \quad \text{sujeta a las condición: } \Phi(x) = \Phi(x + 2\pi R). \quad (3.30)$$

Note que en principio la coordenada x tiene como dominio de definición todos los reales $x \in \mathbb{R}$. Pero si utilizamos la condición de periodicidad, nos basta con conocer los valores de la función de onda $\Phi(x)$, para x en el intervalo: $x \in [0, 2\pi R)$. Note también que la coordenada x es el producto de un ángulo por el radio de S^1 , esto es, $x = \phi R$. En principio también en este caso, la variable angular ϕ tiene como dominio de definición \mathbb{R} , pero nuevamente si utilizamos la condición de periodicidad, basta con conocer a ϕ en el intervalo $[0, 2\pi)$. Si escribimos la ecuación de Schrödinger en términos de la variable ϕ en vez de la variable x , obtenemos directamente de (3.30)

$$-\frac{\hbar^2}{2mR^2} \frac{d^2\Phi(\phi)}{d\phi^2} = E\Phi(\phi), \quad \text{sujeta a las condición: } \Phi(\phi) = \Phi(\phi + 2\pi). \quad (3.31)$$

O equivalentemente

$$\frac{d^2\Phi(\phi)}{d\phi^2} + \frac{2mR^2E}{\hbar^2}\Phi(\phi) = \frac{d^2\Phi(\phi)}{d\phi^2} + \lambda\Phi(\phi) = 0, \quad \text{con } \lambda \equiv \frac{2mR^2E}{\hbar^2}. \quad (3.32)$$

¿Cuál es la solución a esta ecuación? Nuevamente son funciones trigonométricas, pero esta vez es más directo imponer las condiciones de frontera si consideramos la forma compleja de la solución. Tenemos entonces que

$$\Phi(\phi) = Ae^{i\phi\sqrt{\lambda}}, \quad (3.33)$$

con $A = \text{cte}$. Imponiendo la condición de frontera en esta solución nos lleva a obtener una condición para λ

$$\Phi(\phi) = \Phi(\phi + 2\pi) \Rightarrow e^{i(\phi+2\pi)\sqrt{\lambda}} = e^{i\phi\sqrt{\lambda}} \Rightarrow e^{i2\pi\sqrt{\lambda}} = 1 \Rightarrow \sqrt{\lambda} = n \in \mathbb{Z}.$$

Concluimos entonces que las funciones de onda y los valores de la energía son

$$\Phi(\phi) = Ae^{in\phi} \quad \text{y} \quad E_n = \frac{n^2\hbar^2}{2mR^2} \quad \text{con: } n \in \mathbb{Z}. \quad (3.34)$$

El estado físico más general posible de una partícula en un círculo será entonces

$$\Phi(\phi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\phi}. \quad (3.35)$$

Pero esto no es otra cosa que ¡la serie de Fourier de la función $\Phi(\phi)$ sobre el círculo unitario! Compare esta ecuación con la ecuación (2.24).

3.2. Clase 8

El objetivo de esta clase es presentar el método de solución de las Ecuaciones Diferenciales Parciales conocido como *método de separación de variables*. En vez de elaborar la teoría en general y hacer afirmaciones en abstracto, ejemplificaremos el método aplicándolo a la ecuación de Helmholtz

$$\nabla^2\Psi + k^2\Psi = 0,$$

donde ∇^2 es el operador laplaciano. Esta ecuación aparece tan frecuentemente en física, que es muy interesante obtener sus soluciones. Cuando $k = 0$, la ecuación se reduce a la ecuación de Laplace. Por simplicidad discutiremos primeramente el caso en 2D.

3.2.1. Coordenadas cartesianas en 2D

Si la ecuación de movimiento de un problema particular tiene suficiente simetrías del tipo adecuado, entonces algunas veces es posible reducir el problema a alguno que involucre ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\begin{array}{ccc} \text{Ecuación Diferencial Parcial} & & \text{Conjunto de} \\ + & \leftrightarrow & \text{Ecuaciones Diferenciales} \\ \text{simetrías} & & \text{Ordinarias} \end{array}$$

Como ejemplo del método de separación de variables, estudiaremos el caso de la ecuación de Helmholtz $(\nabla^2 + k^2)\Psi = 0$, que tiene como caso particular a la ecuación de Laplace $\nabla^2\Psi = 0$. Estudiaremos el método en dos diferentes sistemas coordenados en 2D: coordenadas cartesianas y coordenadas polares.

En coordenadas cartesianas la ecuación de Helmholtz es

$$\frac{\partial^2\Psi(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Psi(x, y)}{\partial y^2} + k^2\Psi(x, y) = 0. \quad (3.36)$$

¿Qué simetría tiene esta ecuación? Como puede verse, esta ecuación es invariante ante una traslación de coordenadas

$$x \rightarrow x + c_1 \equiv \tilde{x}, \quad y \rightarrow y + c_2 \equiv \tilde{y}, \quad (3.37)$$

donde c_1 y c_2 son constantes. Ante esta transformación de coordenadas se tiene que

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial \tilde{x}}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} = \frac{\partial}{\partial \tilde{x}}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial \tilde{y}}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} = \frac{\partial}{\partial \tilde{y}}, \quad \Psi(x, y) \rightarrow \Psi(x+c_1, y+c_2) = \Psi(\tilde{x}, \tilde{y}), \quad (3.38)$$

con lo cual concluimos que la ecuación de Helmholtz es invariante ante una traslación de coordenadas

$$\frac{\partial^2\Psi(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Psi(x, y)}{\partial y^2} + k^2\Psi(x, y) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2\Psi(\tilde{x}, \tilde{y})}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial^2\Psi(\tilde{x}, \tilde{y})}{\partial \tilde{y}^2} + k^2\Psi(\tilde{x}, \tilde{y}) = 0. \quad (3.39)$$

Esto no significa que $\Psi(x, y) = \Psi(\tilde{x}, \tilde{y})$, sino que la solución transforma de manera tal que si $\Psi(x, y)$ es solución, entonces $\Psi(x + c_1, y + c_2)$ también es solución.

Como su nombre lo indica, el método de *separación de variables* es un método que nos permite separar una ecuación diferencial parcial en un conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias. Esquemáticamente podemos describir el método en 3 pasos:

Paso 1. Proponemos que la función de dos variables $\Psi(x, y)$, se pueda expresar como un producto de funciones de una variable

$$\Psi(x, y) = X(x)Y(y). \quad (3.40)$$

Con esta forma de la función, la ecuación de Helmholtz se reescribe como

$$Y(y) \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} + X(x) \frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2} + k^2 X(x)Y(y) = 0. \quad (3.41)$$

Paso 2. Multiplicamos la ecuación por una función apropiada que nos permita separar las variables. En el caso de coordenadas cartesianas, ésta corresponde simplemente al inverso de la función $\Psi(x, y) = X(x)Y(y)$

$$\begin{aligned} \frac{1}{X(x)Y(y)} \left(Y(y) \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} + X(x) \frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2} + k^2 X(x)Y(y) \right) &= 0, \\ \Rightarrow \underbrace{\frac{1}{X(x)} \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2}}_{\text{sólo depende de } x} + \underbrace{\frac{1}{Y(y)} \frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2} + k^2}_{\text{sólo depende de } y} &= 0. \end{aligned} \quad (3.42)$$

Después de estos dos pasos se ha logrado el objetivo del método, separar los términos que dependen de la variable x , de los que dependen de la variable y . Explícitamente tenemos

$$-\frac{1}{X(x)} \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} = \frac{1}{Y(y)} \frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2} + k^2. \quad (3.43)$$

Paso 3. El último paso del método consiste del siguiente argumento: el lado izquierdo de la ecuación (3.43) sólo depende de la variable x , mientras que el lado derecho sólo depende de la variable y . Dado que ambos miembros de la ecuación son iguales para todo x y para todo y , y además éstas son coordenadas independientes, la única forma de que se satisfaga la igualdad, es que ambos lados sean igual a una constante. Llamemos a esta constante a_1

$$-\frac{1}{X(x)} \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} = \frac{1}{Y(y)} \frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2} + k^2 = a_1^2. \quad (3.44)$$

Obtenemos entonces dos ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} + a_1^2 X(x) = 0, \quad (3.45)$$

$$\frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2} + \underbrace{(k^2 - a_1^2)}_{\equiv a_2^2} Y(y) = 0. \quad (3.46)$$

En resumen, el método de separación de variables nos permitió escribir la ecuación de Helmholtz, que es una ecuación diferencial en derivadas parciales de dos variables, como dos ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\nabla^2 \Psi(x, y) + k^2 \Psi(x, y) = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} + a_1^2 X(x) = 0, \\ \frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2} + a_2^2 Y(y) = 0, \end{cases} \quad \text{con } k^2 = a_1^2 + a_2^2. \quad (3.47)$$

Las soluciones a estas ecuaciones diferenciales ordinarias son de la forma

$$X(x) \sim e^{ia_1x}, \quad Y(y) \sim e^{ia_2y}. \quad (3.48)$$

En principio, las constantes a_1 y a_2 pueden ser ¹⁰

$$\left. \begin{array}{l} \text{reales} \quad \Rightarrow \text{soluciones oscilatorias} \\ \text{imaginarias} \Rightarrow \text{soluciones exponenciales crecientes y decrecientes} \end{array} \right\} \text{ sujetas a } k^2 = a_1^2 + a_2^2.$$

Lo que determinará su naturaleza última, son las condiciones de frontera del problema específico. La solución general a la ecuación de Helmholtz (3.36) antes de imponer las condiciones de frontera, es una suma infinita sobre las funciones exponenciales (3.48)

$$\Psi(x, y) = \int_{a_1} \int_{a_2} c(a_1, a_2) e^{ia_1x} e^{ia_2y} da_1 da_2, \quad (3.49)$$

donde a_1 y a_2 son constantes arbitrarias, sujetas únicamente a la condición $a_1^2 + a_2^2 = k^2$.

Sin embargo, las condiciones de frontera aseguran que existe únicamente un número infinito de parejas discretas para las constantes de separación, recuerde los ejemplos: 3.1.6 y 3.1.7. En un problema bien definido¹¹, las condiciones de frontera determinan de manera única los valores de los coeficientes constantes $c(a_1, a_2)$.

Ejemplo 3.2.1 *Obtengamos la forma de la función armónica¹² $\varphi(x, y)$ en el interior de la región rectangular: $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$, sujeta a las condiciones de frontera*

$$\begin{aligned} \varphi(x, 0) = 0, \quad \varphi(x, b) = f(x), \quad 0 < x < a, \\ \varphi(0, y) = 0, \quad \varphi(a, y) = 0, \quad 0 < y < b. \end{aligned} \quad (3.50)$$

Solución: Como $\varphi(x, y)$ es armónica, ésta satisface la ecuación de Laplace

$$\frac{\partial^2 \varphi(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi(x, y)}{\partial y^2} = 0, \quad \text{para } 0 < x < a, \quad 0 < y < b. \quad (3.51)$$

¹⁰Note que esto no es nuevo, sólo es una forma diferente pero equivalente de presentar las soluciones (3.20) de la ecuación (3.18).

¹¹En la literatura sobre ecuaciones diferenciales, a veces se utiliza el término “colocado”, para referirse a una ecuación diferencial bien definida.

¹²A una función que satisface la ecuación de Laplace se le llama función armónica.

Hemos visto que esta ecuación se puede resolver aplicando el método de separación de variables. Encontramos que proponiendo $\varphi(x, y) = X(x)Y(y)$, la ecuación de Laplace se reescribe como dos ecuaciones diferenciales ordinarias (ver ec. (3.47))

$$\frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} + a_1^2 X(x) = 0, \quad (3.52)$$

$$\frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2} + a_2^2 Y(y) = 0, \quad (3.53)$$

donde las constantes de separación están sujetas a la relación $a_1^2 + a_2^2 = 0$. Las condiciones de frontera que satisfacen las funciones $X(x)$ y $Y(y)$, se obtienen de las condiciones (3.50) que satisface la función $\varphi(x, y)$.

$$\left. \begin{aligned} \varphi(0, y) = X(0)Y(y) = 0, \\ \varphi(a, y) = X(a)Y(y) = 0, \end{aligned} \right\} \Rightarrow X(0) = X(a) = 0, \quad (3.54)$$

$$\varphi(x, 0) = X(x)Y(0) = 0, \quad \Rightarrow Y(0) = 0. \quad (3.55)$$

La condición restante no cambia $\varphi(x, b) = f(x)$. Antes de ir a la solución del problema, note que de la condición $a_1^2 + a_2^2 = 0$, podemos inferir que a_1 y a_2 no pueden ser ambos números reales, ya que la única posibilidad de satisfacer la ecuación, sería que ambos fueran cero. Por la misma razón tampoco pueden ser ambos números imaginarios. Concluimos entonces que uno de ellos será un número real y el otro será un número imaginario. Pero ¿Cuál de las dos constantes es un número real, a_1 ó a_2 ? La respuesta es directa, en la sección 3.1.4 vimos que la ecuación diferencial (3.52) sujeta a las condiciones de Dirichlet (3.54) tiene soluciones sólo si a_1^2 es un número real, por lo tanto

$$X(x) \sim \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right), \quad \text{donde } a_1 = \frac{n\pi}{a}, \quad \text{con } n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.56)$$

Sólo nos resta resolver la ecuación (3.53) con $a_2^2 = -a_1^2$

$$\frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2} - \frac{n^2 \pi^2}{a^2} Y(y) = 0, \quad (3.57)$$

sujeta a la condición de frontera (3.55) y $X(x)Y(b) = f(x)$. Pero esta solución también la obtuvimos en la sección 3.1.4. Vimos que la solución general a la ecuación (3.53) es

$$Y(y) = B_1 \sinh\left(\frac{n\pi y}{a}\right) + B_2 \cosh\left(\frac{n\pi y}{a}\right). \quad (3.58)$$

Y para que esta solución satisfaga la condición de frontera en $y = 0$, entonces, $B_2 = 0$ y por tanto

$$Y(y) \sim \sinh\left(\frac{n\pi y}{a}\right). \quad (3.59)$$

Concluimos entonces que la solución armónica φ tiene la forma

$$\varphi(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sinh\left(\frac{n\pi y}{a}\right), \quad (3.60)$$

donde las constantes A_n quedan aún por determinarse. ¿Cómo las determinamos? Las determinamos utilizando la condición de frontera restante

$$\varphi(x, b) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sinh\left(\frac{n\pi b}{a}\right). \quad (3.61)$$

Pero esta expresión corresponde a una serie de Fourier en 1D! Podemos visualizar la serie de dos formas equivalentes. Una como el desarrollo de Fourier de la función $f(x)$ donde los coeficientes son el producto $A_n \sinh\left(\frac{n\pi b}{a}\right)$ o como el desarrollo de Fourier de la función $f(x)/\sinh\left(\frac{n\pi b}{a}\right)$ con coeficientes A_n . Aunque podemos obtener directamente la expresión de los coeficientes A_n utilizando la ecuación (2.20), los calcularemos utilizando las relaciones de ortogonalidad de las funciones seno.

Multiplicando la ecuación (3.61) por el $\sin(m\pi x/a)$, integrando en el intervalo $x \in [0, a]$ y utilizando las condiciones de ortogonalidad del seno obtenemos

$$\begin{aligned} \int_0^a f(x) \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) dx &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sinh\left(\frac{n\pi b}{a}\right) \int_0^a \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) dx \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sinh\left(\frac{n\pi b}{a}\right) \frac{a}{2} \delta_{m,n} = \frac{a}{2} A_m \sinh\left(\frac{m\pi b}{a}\right). \end{aligned}$$

Despejando el coeficiente A_m se obtiene finalmente

$$A_m = \frac{2}{a \sinh\left(\frac{m\pi b}{a}\right)} \int_0^a f(x) \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) dx. \quad (3.62)$$

Sustituyendo esta expresión del coeficiente en la ecuación (3.60) obtenemos finalmente la expresión de la función armónica

$$\varphi(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{a \sinh\left(\frac{n\pi b}{a}\right)} \left[\int_0^a f(z) \sin\left(\frac{m\pi z}{a}\right) dz \right] \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sinh\left(\frac{n\pi y}{a}\right). \quad (3.63)$$

En el caso particular en que la función $f(x) = V$ con $V = \text{constante}$, obtenemos

$$\begin{aligned} \int_0^a V \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) dx &= -\frac{aV}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \Big|_0^a = -\frac{aV}{n\pi} (\cos n\pi - 1) \\ &= -\frac{aV}{n\pi} ((-1)^n - 1) = \begin{cases} 0 & n \text{ par} \\ \frac{2aV}{n\pi} & n \text{ impar} \end{cases} \end{aligned} \quad (3.64)$$

por lo cual, la función armónica buscada es

$$\varphi(x, y) = \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{4V}{n\pi \sinh\left(\frac{n\pi b}{a}\right)} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sinh\left(\frac{n\pi y}{a}\right). \quad (3.65)$$

3.2.2. Coordenadas polares

En muchos problemas físicos las condiciones de frontera son tales que los valores de una función o de sus derivadas se especifican sobre superficies curvas (círculos, parábolas, hipérbolas, etc.). En estos casos las coordenadas cartesianas no son adecuadas para la formulación de problemas con valores en la frontera y debemos utilizar otro sistema coordenado.

El segundo ejemplo de separabilidad que estudiaremos en 2 dimensiones es el de la ecuación de Laplace en coordenadas polares. Las coordenadas polares tienen como dominio de definición los intervalos: $\rho \in [0, \infty)$, $\phi \in [0, 2\pi)$ y están relacionadas con las coordenadas cartesianas a través del cambio de variables

$$x = \rho \cos \phi, \quad y = \rho \sin \phi. \quad (3.66)$$

En coordenadas polares la ecuación de Helmholtz se escribe explícitamente en la forma

$$(\nabla^2 + k^2) \Psi(\rho, \phi) = 0 \Rightarrow \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \Psi}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \phi^2} + k^2 \Psi = 0. \quad (3.67)$$

Proponiendo la separación de variables

$$\Psi(\rho, \phi) = R(\rho)\Phi(\phi), \quad (3.68)$$

la ecuación de Helmholtz se reescribe como

$$\frac{\Phi(\phi)}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial R(\rho)}{\partial \rho} \right) + \frac{R(\rho)}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Phi(\phi)}{\partial \phi^2} + k^2 R(\rho)\Phi(\phi) = 0, \quad (3.69)$$

y multiplicando la ecuación por $\rho^2/(R(\rho)\Phi(\phi))$ obtenemos

$$\frac{\rho}{R(\rho)} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial R(\rho)}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\Phi(\phi)} \frac{\partial^2 \Phi(\phi)}{\partial \phi^2} + k^2 \rho^2 = 0. \quad (3.70)$$

Note que en esta ecuación las variables están separadas. Introduciendo la constante de separación: $m^2 > 0$

$$\frac{\rho}{R(\rho)} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial R(\rho)}{\partial \rho} \right) + k^2 \rho^2 = -\frac{1}{\Phi(\phi)} \frac{\partial^2 \Phi(\phi)}{\partial \phi^2} = m^2, \quad (3.71)$$

obtenemos el par de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\frac{\partial^2 \Phi(\phi)}{\partial \phi^2} + m^2 \Phi(\phi) = 0, \quad (3.72)$$

$$\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial R(\rho)}{\partial \rho} \right) + (k^2 \rho^2 - m^2) R(\rho) = 0. \quad (3.73)$$

Usualmente cuando uno está aprendiendo el método de separación de variables, uno duda sobre el signo que debemos utilizar frente a la constante de separación m^2 (suponiendo que $m \in \mathbb{R}$). Pero usted no debe dudar, el signo que debe llevar en frente la constante m^2 es aquel que de origen a la ecuación (3.72). ¿Por qué? Pues porque al igual que en el ejercicio 3.1.7, la función $\Phi(\phi)$ debe ser una función univaluada debido a las condiciones de periodicidad de la variable angular ϕ . Si en lugar del término $+m^2\Phi$ en (3.72) tuvieramos $-m^2\Phi$, las soluciones de la ecuación serían funciones hiperbólicas, pero estas funciones ¡no son periódicas! Así la única posibilidad es que las soluciones sean funciones trigonométricas y por lo que hemos aprendido, sólo tenemos funciones trigonométricas si tenemos la ecuación (3.72) con el término $+m^2$. En otras palabras, la condición de frontera (periodicidad de $\Phi(\phi)$ en este caso) nos dice el signo de la constante de separación m^2 para que la ecuación resultante tenga solución, sujeta a esas condiciones de frontera.

Ejemplo 3.2.2 *Considere un aro circular metálico de radio a , dividido en dos semicircunferencias aisladas entre sí. Las mitades del aro se mantienen a un potencial $+V$ y $-V$ respectivamente. Nuestro objetivo es calcular el campo eléctrico en la región interior del aro. Como usted aprendió en su curso de Campos, el campo eléctrico se puede calcular fácilmente a partir del potencial electrostático φ el cual debe satisfacer la ecuación de Laplace*

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \phi^2} = 0. \quad (3.74)$$

En nuestro ejemplo, el potencial está sujeto a las condiciones de frontera

$$\varphi(a, \phi) = f(\phi) = \begin{cases} +V & 0 < \phi < \pi, \\ -V & -\pi < \phi < 0. \end{cases} \quad (3.75)$$

Aplicando separación de variables: $\varphi(\rho, \phi) = \Phi(\phi)R(\rho)$, obtenemos el par de ecuaciones (3.72) y (3.73) con $k=0$. Las soluciones a la ecuación (3.72) ya las hemos obtenido, y son: la función constante $\Phi_0 = C_0$ y las funciones trigonométricas $\Phi_m(\phi) \sim \cos(m\phi)$, $\Phi'_m(\phi) \sim \sin(m\phi)$ con $m \in \mathbb{N}$ (ver ec. (3.19)). Explícitamente tenemos que

$$\Phi(\phi) = C_0 + \sum_{m=1}^{\infty} (C_m \cos(m\phi) + D_m \sin(m\phi)), \quad (3.76)$$

donde C_m y D_m son constantes. La ecuación radial (3.73) se puede reescribir como

$$\frac{d^2 R}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dR}{d\rho} - \frac{m^2}{\rho^2} R = 0. \quad (3.77)$$

Esta ecuación se conoce como la ecuación de Euler y sus soluciones son

$$R_m(\rho) = \begin{cases} C = \text{cte. y } \log \rho, & \text{para } m = 0, \\ \rho^m \text{ y } \rho^{-m}, & \text{para } m > 0. \end{cases} \quad (3.78)$$

Así las soluciones a la ecuación de Laplace (3.74) son de la forma

$$\Phi_0 R_0(\rho) = \begin{cases} A_0, & \text{para } m=0, \\ D_0 \log \rho, & \end{cases} \quad (3.79)$$

donde A_0 y D_0 son constantes, mientras que en el caso $m > 0$, las soluciones son de la forma

$$\Phi_m(\phi) R_m(\rho) = \begin{cases} A_m \rho^m \cos(m\phi), & B_m \rho^m \sin(m\phi), \\ E_m \rho^{-m} \cos(m\phi), & F_m \rho^{-m} \sin(m\phi), \end{cases} \quad (3.80)$$

donde A_m , B_m , E_m y F_m también son constantes. Sin embargo, aunque matemáticamente tenemos varias soluciones posibles, un argumento físico nos elimina la mitad de ellas. Dado que el campo eléctrico \vec{E} se obtiene a través de un gradiente, $\vec{E} = -\nabla\varphi$, el potencial electrostático debe tener un gradiente en $\rho = 0$. Dicho de otra manera, queremos que el potencial φ esté bien definido en $\rho = 0$. Para que esto suceda, las soluciones ρ^{-m} y $\log \rho$ no son admisibles. Concluimos entonces que la solución de la ecuación de Laplace es de la forma

$$\varphi(\rho, \phi) = A_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \rho^m (A_m \cos(m\phi) + B_m \sin(m\phi)). \quad (3.81)$$

Para que esta solución satisfaga la ecuación de frontera (3.75), debemos evaluarla en $\rho = a$, con lo cual

$$\varphi(\rho = a, \phi) = f(\phi) = A_0 + \sum_{m=1}^{\infty} a^m (A_m \cos(m\phi) + B_m \sin(m\phi)). \quad (3.82)$$

Pero esto no es otra cosa que la serie de Fourier de la función escalón (2.21), discutida en el ejemplo 2.2.1. La única diferencia es que ahora los coeficientes de la serie están multiplicados por la constante a^m , es decir $a^m B_m = b_m$, donde B_m son los coeficientes de la serie (3.82) y b_m son los coeficientes de la serie de Fourier en el ejemplo 2.2.1. Lo mismo debe suceder para los coeficientes A_m , pero del ejemplo referido sabemos que éstos se anulan. Los coeficientes no nulos son según 2.2.1, $b_m = a^m B_m = \frac{4V}{\pi m}$ con m un número impar. Así el resultado final del potencial es

$$\varphi(\rho, \phi) = \frac{4V}{\pi} \sum_{m=1,3,5,\dots} \frac{1}{m} \left(\frac{\rho}{a}\right)^m \sin m\phi, \quad \rho \leq a. \quad (3.83)$$

Note que en el límite $\rho = a$, el potencial se reduce a la serie de Fourier de la función escalón (2.22) ¡como debe ser!

¿Cuál es la expresión del potencial para $\rho > a$?

3.3. Clase 9

Una vez que hemos aprendido el método de separación de variables analizando la ecuación de Helmholtz en sistemas coordenados en 2D, apliquemos el método al caso de 3D. Nuevamente nos limitaremos a discutir la ecuación de Helmholtz.

3.3.1. Ecuación de Helmholtz en coordenadas cartesianas 3D

En la sección 3.2.1 hemos discutido el método de separación de variables de la ecuación de Helmholtz en coordenadas cartesianas con dos variables independientes. Nuestro objetivo es generalizar este resultado al caso de 3D.

En coordenadas cartesianas la ecuación de Helmholtz es

$$\frac{\partial^2 \Psi(x, y, z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi(x, y, z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi(x, y, z)}{\partial z^2} + k^2 \Psi(x, y, z) = 0. \quad (3.84)$$

Al igual que en el caso 2D, uno se pregunta por las simetrías de esta ecuación. Como puede verificarse fácilmente, esta ecuación es invariante ante una traslación de coordenadas

$$x \rightarrow x + c_1 \equiv \tilde{x}, \quad y \rightarrow y + c_2 \equiv \tilde{y}, \quad z \rightarrow z + c_3 \equiv \tilde{z}. \quad (3.85)$$

donde c_1 , c_2 y c_3 son constantes. Esta simetría es la que nos permite separar variables en la ecuación (3.84).

Siguiendo el método de separación, proponemos que la función de tres variables $\Psi(x, y, z)$, se pueda expresar como un producto de tres funciones de una variable

$$\Psi(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z). \quad (3.86)$$

Con esta forma de la función, la ecuación de Helmholtz se reescribe como

$$Y(y)Z(z) \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} + X(x)Z(z) \frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2} + X(x)Y(y) \frac{\partial^2 Z(z)}{\partial z^2} + k^2 X(x)Y(y)Z(z) = 0. \quad (3.87)$$

Multiplicando la ecuación por el inverso de la función: $\Psi(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z)$, obtenemos

$$\underbrace{\frac{1}{X(x)} \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2}}_{\text{sólo depende de } x} + \underbrace{\frac{1}{Y(y)} \frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2}}_{\text{sólo depende de } y} + \underbrace{\frac{1}{Z(z)} \frac{\partial^2 Z(z)}{\partial z^2}}_{\text{sólo depende de } z} + k^2 = 0. \quad (3.88)$$

Al igual que en el caso de 2D, hemos logrado separar los términos que dependen de la variable x , de los que dependen de la variable y y z .

Aplicando el último paso del método a esta ecuación, notamos que en esta ocasión tendremos que introducir dos constantes de separación. Es decir, tendremos que aplicar el último paso en dos ocasiones. La primer constante de integración se introduce al escribir, por ejemplo, el término que depende de la variable z por separado

$$-\frac{1}{Z(z)} \frac{\partial^2 Z(z)}{\partial z^2} = \frac{1}{X(x)} \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} + \frac{1}{Y(y)} \frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2} + k^2 = a_3^2. \quad (3.89)$$

Obteniendo una ecuación diferencial parcial en dos variables y una ecuación diferencial ordinaria

$$\frac{1}{X(x)} \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} + \frac{1}{Y(y)} \frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2} + (k^2 - a_3^2) = 0, \quad (3.90)$$

$$\frac{\partial^2 Z(z)}{\partial z^2} + a_3^2 Z(z) = 0. \quad (3.91)$$

Pero la ecuación (3.90) es la misma que la ecuación (3.42) y sabemos que para separarla debemos introducir una constante de separación adicional. No debemos trabajar más ¡ya sabemos como separar la ecuación! La separación está dada por la ecuación (3.47)

$$(\nabla^2 + k^2) \Psi(x, y, z) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} + a_1^2 X(x) = 0, \\ \frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2} + a_2^2 Y(y) = 0, \\ \frac{\partial^2 Z(z)}{\partial z^2} + a_3^2 Z(z) = 0 \end{cases} \text{ con } k^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2. \quad (3.92)$$

En resumen, el método de separación de variables nos permitió escribir la ecuación de Helmholtz, que es una ecuación diferencial en derivadas parciales de tres variables, como tres ecuaciones diferenciales ordinarias. Las soluciones a estas ecuaciones son de la forma

$$X(x) \sim e^{ia_1x}, \quad Y(y) \sim e^{ia_2y}, \quad Z(z) \sim e^{ia_3z}, \quad (3.93)$$

y la solución general a la ecuación de Helmholtz (3.84) antes de imponer las condiciones de frontera, es una suma infinita sobre las funciones exponenciales (3.93)

$$\Psi(x, y, z) = \int_{a_1} \int_{a_2} \int_{a_3} c(a_1, a_2, a_3) e^{ia_1x} e^{ia_2y} e^{ia_3z} da_1 da_2 da_3, \quad (3.94)$$

donde a_1 , a_2 y a_3 son constantes que pueden ser reales o imaginarias, sujetas únicamente a la condición: $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = k^2$.

Ejemplo 3.3.1 Consideremos un problema típico de electrostática en el cual un paralelepípedo hueco de aristas a , b y c , se compone de platos metálicos conductores donde 5 de ellos se mantienen a potencial cero y el restante a un potencial constante V . Nuestro objetivo es calcular el potencial electrostático en cualquier punto dentro del cubo.

Matemáticamente deseamos resolver la ecuación de Laplace

$$\nabla^2 \varphi(x, y, z) = 0, \quad (3.95)$$

sujeta a las condiciones de frontera

$$\varphi(0, y, z) = \varphi(a, y, z) = \varphi(x, y, 0) = \varphi(x, y, c) = \varphi(x, 0, z) = 0, \quad \varphi(x, b, z) = V. \quad (3.96)$$

Es claro que estamos considerando la cara: $y = b$, como la que se encuentra al potencial constante V , con las otras 5 caras a potencial cero.

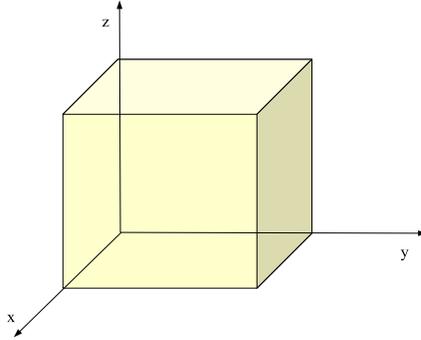


Figura 3.1: En la figura mostramos un paralelepípedo hueco de arista a en el eje x , b en el eje y y c en el eje z .

Dado que queremos resolver $\nabla^2\varphi(x,y,z) = 0$, la constante k que aparece en la ecuación de Helmholtz (3.84) debe tomarse igual a cero: $k = 0$, con lo cual las constantes de separación satisfacen

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 0.$$

Aplicando el método de separación de variables a la ecuación de Laplace, sabemos ya que obtendremos las tres ecuaciones diferenciales ordinarias (3.92). Pero ¿Qué condiciones de frontera satisfacen estas ecuaciones? Estas condiciones las obtenemos aplicando el método de separación de variables a las condiciones (3.96). Las condiciones resultantes son

$$\begin{aligned} \varphi(0, y, z) = \varphi(a, y, z) = 0 &\Rightarrow X(0) = X(a) = 0, \\ \varphi(x, y, 0) = \varphi(x, y, c) = 0 &\Rightarrow Z(0) = Z(c) = 0, \\ \varphi(x, 0, z) = 0 &\Rightarrow Y(0) = 0. \end{aligned} \quad (3.97)$$

La sexta condición no se modifica $\varphi(x, b, z) = V$.

Tenemos así dos ecuaciones diferenciales ordinarias sujetas a condiciones de Dirichlet en los dos extremos y una ecuación diferencial ordinaria sujeta a una condición de Dirichlet sólo en un extremo, pero ¡ya conocemos la solución a estas ecuaciones!

Las soluciones en las variables x y z son de la forma (3.26), explícitamente

$$X(x) \sim \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right), \quad Z(z) \sim \sin\left(\frac{m\pi z}{c}\right), \quad (3.98)$$

donde $n, m \in \mathbb{N}$. Como $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 0$, $a_1 = \frac{n\pi}{a}$ y $a_3 = \frac{m\pi}{c}$, concluimos que a_2 es un número imaginario

$$a_2^2 = -(a_1^2 + a_3^2) = -\pi^2 \left(\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{c^2} \right) \Rightarrow a_2 = i\pi \sqrt{\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{c^2}}. \quad (3.99)$$

Así la ecuación para la función $Y(y)$ es

$$\frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2} - \pi^2 \left(\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{c^2} \right) Y(y) = 0. \quad (3.100)$$

Pero hemos visto en el ejemplo (3.2.1) que la solución a esta ecuación sujeta a la condición de Dirichlet $Y(y) = 0$ es

$$Y(y) \sim \sinh \left(\sqrt{\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{c^2}} \pi y \right). \quad (3.101)$$

Habiendo utilizado 5 de las 6 condiciones de frontera, concluimos que la forma más general del potencial, sujeto a las condiciones de frontera (3.97) es una combinación lineal de las soluciones independientes: $\varphi_{nm}(x, y, z) = X_n(x)Y_{nm}(y)Z_m(z)$

$$\begin{aligned} \varphi(x, y, z) &= \sum_{m>0} \sum_{n>0} B_{nm} \varphi_{nm}(x, y, z) \\ &= \sum_{m>0} \sum_{n>0} B_{nm} \sin \left(\frac{n\pi x}{a} \right) \sin \left(\frac{m\pi z}{c} \right) \sinh \left(\sqrt{\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{c^2}} \pi y \right), \end{aligned} \quad (3.102)$$

donde los coeficientes B_{mn} son constantes. ¿Cómo determinamos estos coeficientes? La respuesta es sencilla, de la condición de frontera que no hemos utilizado aún

$$\varphi(x, b, z) = V = \sum_{p>0} \sum_{q>0} B_{pq} \sin \left(\frac{p\pi x}{a} \right) \sin \left(\frac{q\pi z}{c} \right) \sinh \left(\sqrt{\frac{p^2}{a^2} + \frac{q^2}{c^2}} \pi b \right), \quad (3.103)$$

y de la relación de ortogonalidad de la función seno

$$\begin{aligned} V \int_0^a \sin \left(\frac{n\pi x}{a} \right) dx \int_0^c \sin \left(\frac{m\pi z}{c} \right) dz &= \sum_{p>0} \sum_{q>0} B_{pq} \int_0^a \sin \left(\frac{n\pi x}{a} \right) \sin \left(\frac{p\pi x}{a} \right) dx \\ &\quad \int_0^c \sin \left(\frac{m\pi z}{c} \right) \sin \left(\frac{q\pi z}{c} \right) dz \sinh \left(\sqrt{\frac{p^2}{a^2} + \frac{q^2}{c^2}} \pi b \right) \\ &= \sum_{p>0} \sum_{q>0} B_{pq} \frac{a}{2} \delta_{pn} \frac{c}{2} \delta_{qm} \sinh \left(\sqrt{\frac{p^2}{a^2} + \frac{q^2}{c^2}} \pi b \right) \\ &= \frac{ac}{4} B_{nm} \sinh \left(\sqrt{\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{c^2}} \pi b \right). \end{aligned}$$

Por lo que

$$B_{nm} = \frac{4V}{ac \sinh \left(\sqrt{\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{c^2}} \pi b \right)} \int_0^a \sin \left(\frac{n\pi x}{a} \right) dx \int_0^c \sin \left(\frac{m\pi z}{c} \right) dz. \quad (3.104)$$

Pero en la ecuación (3.64) ya hemos calculado esta integral. El resultado es $2a/(n\pi)$ para la primer integral y $2c/(m\pi)$ para la segunda, con n y m números impares. Obtenemos entonces finalmente que el valor de los coeficientes es

$$B_{nm} = \frac{16V}{nm\pi^2 \sinh \left(\sqrt{\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{c^2}} \pi b \right)}, \quad \text{con : } n, m = 1, 3, 5, \dots \quad (3.105)$$

y la expresión del potencial dentro del paralelepípedo es

$$\varphi(x, y, z) = \frac{16V}{\pi^2} \sum_{n=1,3,\dots} \sum_{m=1,3,\dots} \frac{1}{nm} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi z}{c}\right) \frac{\sinh\left(\sqrt{\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{c^2}} \pi y\right)}{\sinh\left(\sqrt{\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{c^2}} \pi b\right)} \quad (3.106)$$

3.3.2. Ecuación de Helmholtz en coordenadas polares esféricas

Al igual que en 2D, en 3D muchos problemas físicos aparecen con condiciones de frontera tales que los valores de una función o de sus derivadas se especifican sobre superficies curvas (esferas, cilindros, etc.). En estos casos las coordenadas cartesianas no son adecuadas para la formulación de problemas con valores en la frontera y debemos trabajar las ecuaciones en otros sistemas coordenados.

El segundo ejemplo de separabilidad que estudiaremos en 3D, surge al resolver la ecuación de Helmholtz en coordenadas esféricas (r, θ, ϕ) . Las coordenadas esféricas tienen como dominio de definición los intervalos: $r \in [0, \infty)$, $\theta \in [0, \pi]$, $\phi \in [0, 2\pi)$ y están relacionadas con las coordenadas cartesianas (x, y, z) a través del cambio de variables

$$x = r \sin \theta \cos \phi, \quad y = r \sin \theta \sin \phi, \quad z = r \cos \theta. \quad (3.107)$$

En términos de las coordenadas esféricas, la ecuación de Helmholtz

$$\nabla^2 \Psi(r, \theta, \phi) + k^2 \Psi(r, \theta, \phi) = 0, \quad (3.108)$$

se escribe explícitamente en la forma

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \phi^2} + k^2 \Psi = 0. \quad (3.109)$$

Es útil reescribir esta ecuación en la forma equivalente

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \nabla_{(\theta, \phi)}^2 \Psi + k^2 \Psi = 0, \quad (3.110)$$

donde hemos definido el operador laplaciano angular $\nabla_{(\theta, \phi)}^2$ como

$$\nabla_{(\theta, \phi)}^2 \equiv \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}. \quad (3.111)$$

El objetivo de hacer esta reescritura de la ecuación de Helmholtz es separar explícitamente la dependencia de la ecuación en la coordenada r , de la dependencia de la ecuación en las coordenadas angulares θ y ϕ .

Siguiendo la prescripción que hemos dado para emplear el método de separación de variables, el primer paso es proponer una solución como un producto de funciones.

Veamos que podemos separar la ecuación de Helmholtz (3.110) si reescribimos la función $\Psi(r, \theta, \phi)$ en la forma¹³

$$\Psi(r, \theta, \phi) = \frac{1}{r} R(r) Y(\theta, \phi). \quad (3.112)$$

Para ello note que al calcular la derivada parcial radial se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi}{\partial r} &= \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} R(r) \right) Y(\theta, \phi) = \left(-\frac{1}{r^2} R(r) + \frac{1}{r} \frac{\partial R(r)}{\partial r} \right) Y(\theta, \phi), \\ \Rightarrow r^2 \frac{\partial \Psi}{\partial r} &= \left(-R(r) + r \frac{\partial R(r)}{\partial r} \right) Y(\theta, \phi), \\ \Rightarrow \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) &= \left(-\frac{\partial R(r)}{\partial r} + \frac{\partial R(r)}{\partial r} + r \frac{\partial^2 R(r)}{\partial r^2} \right) Y(\theta, \phi) = r \frac{\partial^2 R(r)}{\partial r^2} Y(\theta, \phi). \end{aligned}$$

Sustituyendo esta expresión de la derivada, en la ecuación de Helmholtz (3.110), obtenemos

$$\frac{1}{r^2} r \frac{\partial^2 R(r)}{\partial r^2} Y(\theta, \phi) + \frac{1}{r^2} \frac{1}{r} R(r) \nabla_{(\theta, \phi)}^2 Y(\theta, \phi) + k^2 \frac{1}{r} R(r) Y(\theta, \phi) = 0. \quad (3.113)$$

Finalmente, multiplicando esta ecuación por $r^2/\Psi(r, \theta, \phi)$ se tiene

$$\frac{r^2}{R(r)} \frac{\partial^2 R(r)}{\partial r^2} + r^2 k^2 + \frac{1}{Y(\theta, \phi)} \nabla_{(\theta, \phi)}^2 Y(\theta, \phi) = 0. \quad (3.114)$$

Vemos así que el método de separación de variables funcionó, ya que hemos logrado escribir la ecuación de forma tal que los primeros dos términos sólo dependan de la coordenada r , mientras que el tercer término sólo depende de las coordenadas angulares θ y ϕ . Introduciendo la constante de separación λ tenemos

$$\frac{r^2}{R(r)} \frac{\partial^2 R(r)}{\partial r^2} + r^2 k^2 = \lambda = -\frac{1}{Y(\theta, \phi)} \nabla_{(\theta, \phi)}^2 Y(\theta, \phi). \quad (3.115)$$

¿Qué hemos logrado? hasta ahora hemos logrado separar la ecuación diferencial parcial de tres variables (r, θ, ϕ) en dos ecuaciones. Una de ellas sólo depende de la variable r y es por tanto una ecuación diferencial ordinaria. La otra ecuación es una ecuación en derivadas parciales, pero ésta sólo depende de dos variables, las variables angulares θ y ϕ . Explícitamente tenemos

$$\frac{d^2 R(r)}{dr^2} = \left(\frac{\lambda}{r^2} - k^2 \right) R, \quad \text{Ecuación Diferencial Ordinaria.} \quad (3.116)$$

$$\nabla_{(\theta, \phi)}^2 Y(\theta, \phi) = -\lambda Y(\theta, \phi), \quad \text{Ecuación Diferencial Parcial.} \quad (3.117)$$

Técnicamente las funciones $Y(\theta, \phi)$ que resuelven la ecuación diferencial parcial (3.117) reciben el nombre de armónicos esféricos. El punto clave es mostrar ahora que esta

¹³En algunos libros se utiliza la notación $u(r) \equiv \frac{R(r)}{r}$.

ecuación diferencial para los armónicos esféricos sobre la esfera unitaria, es bien comportada únicamente si la constante de separación λ toma ciertos valores discretos no negativos (un número infinito de ellos). La manera más elegante de mostrar este resultado es hacer uso de las propiedades de simetría de la esfera y utilizar la teoría de grupos. Sin embargo un análisis de este tipo está fuera del objetivo de este curso. La técnica que emplearemos para mostrar el resultado deseado es examinar las condiciones bajo las cuales se evita el comportamiento singular de las funciones propias de la ecuación diferencial parcial (3.117). Para ello, dado que la ecuación depende de las dos variables angulares, utilizaremos una vez más el método de separación de variables. Propongamos la separación

$$Y(\theta, \phi) = \Theta(\theta)\Phi(\phi). \quad (3.118)$$

Tenemos entonces que la ecuación (3.117) se reescribe como

$$\frac{\Phi(\phi)}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\sin\theta \frac{\partial\Theta(\theta)}{\partial\theta} \right) + \frac{\Theta(\theta)}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial\phi^2} = -\lambda\Theta(\theta)\Phi(\phi). \quad (3.119)$$

Multiplicando la ecuación por $\sin^2\theta/\Theta(\theta)\Phi(\phi)$ obtenemos

$$\frac{\sin\theta}{\Theta(\theta)} \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\sin\theta \frac{\partial\Theta(\theta)}{\partial\theta} \right) + \lambda \sin^2\theta + \frac{1}{\Phi(\phi)} \frac{\partial^2\Phi(\phi)}{\partial\phi^2} = 0. \quad (3.120)$$

En esta ecuación las variables han sido separadas nuevamente, dado que los dos primeros términos dependen sólo de la coordenada θ , mientras que el último término sólo depende de la coordenada ϕ . Introduciendo la constante de separación m^2 obtenemos finalmente el siguiente par de ecuaciones diferenciales

$$\frac{\partial^2\Phi(\phi)}{\partial\phi^2} + m^2\Phi(\phi) = 0, \quad (3.121)$$

$$\sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\sin\theta \frac{\partial\Theta(\theta)}{\partial\theta} \right) + (\lambda \sin^2\theta - m^2)\Theta(\theta) = 0. \quad (3.122)$$

La solución a la ec. (3.121) ya la hemos estudiado en el ejemplo 3.1.7. Aprendimos que la solución a esta ecuación cuando se satisface la condición de periodicidad: $\Phi(\phi) = \Phi(\phi+2\pi)$ está dada por

$$\Phi_m(\phi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\phi}, \quad \text{con} \quad m \in \mathbb{Z}. \quad (3.123)$$

Para analizar la ecuación diferencial para θ (ec. 3.122), es conveniente definir una nueva variable independiente, $x = \cos\theta$ y para que la ecuación se vea como las que usted ha estudiado en sus cursos de ecuaciones diferenciales, también cambiaremos el nombre de la función, $\Theta(\theta) \rightarrow y(x)$. Ante el cambio de variable, la derivada respecto a la coordenada angular θ se reescribe en términos de la derivada parcial respecto a la variable x como

$$x = \cos\theta \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial\theta} = \frac{\partial x}{\partial\theta} \frac{\partial}{\partial x} = -\sin\theta \frac{\partial}{\partial x} = -\sqrt{1-\cos^2\theta} \frac{\partial}{\partial x} = -\sqrt{1-x^2} \frac{\partial}{\partial x}, \quad (3.124)$$

con lo cual la ecuación (3.122) se reescribe como

$$-(1-x^2)\frac{\partial}{\partial x}\left(- (1-x^2)\frac{\partial y}{\partial x}\right) + (\lambda(1-x^2) - m^2)y = 0. \quad (3.125)$$

Nuevamente, como la ecuación sólo depende de una variable, podemos cambiar las derivadas parciales por derivadas totales. Finalmente multiplicando la ecuación por $(1-x^2)^{-1}$ obtenemos la *Ecuación Asociada de Legendre*

$$\frac{d}{dx}\left((1-x^2)\frac{dy(x)}{dx}\right) + \left(\lambda - \frac{m^2}{1-x^2}\right)y(x) = 0. \quad (3.126)$$

El caso más simple de esta ecuación se obtiene para el valor $m = 0$ y se conoce como la *Ecuación de Legendre*

$$\frac{d}{dx}\left((1-x^2)\frac{dy(x)}{dx}\right) + \lambda y(x) = 0. \quad (3.127)$$

Calculando la derivada explícitamente, esta ecuación se puede reescribir como

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + \lambda y = 0. \quad (3.128)$$

Nuestro objetivo será estudiar las soluciones de la ecuación de Legendre y de la ecuación asociada de Legendre. También estaremos interesados en estudiar las propiedades de estas soluciones. Mostraremos de manera detallada que las soluciones son polinomios, conocidos técnicamente como los *Polinomios de Legendre* y los *Polinomios Asociados de Legendre*. Veremos que estos polinomios satisfacen relaciones de ortogonalidad y que forman una base completa en cierto espacio de funciones, pero esto lo haremos en el próximo capítulo.

3.3.3. Ecuación de Helmholtz en coordenadas Cilíndricas

El último ejemplo de separabilidad que estudiaremos en 3D es la ecuación de Helmholtz en coordenadas cilíndricas (ρ, ϕ, z) . Las coordenadas cilíndricas tienen como dominio de definición los intervalos: $\rho \in [0, \infty)$, $\phi \in [0, 2\pi)$ y $z \in (-\infty, \infty)$, y están relacionadas con las coordenadas cartesianas a través del cambio de variables

$$x = \rho \cos \phi, \quad y = \rho \sin \phi, \quad z = z. \quad (3.129)$$

En términos de las coordenadas cilíndricas, la ecuación de Helmholtz

$$\nabla^2 \Psi(\rho, \phi, z) + k^2 \Psi(\rho, \phi, z) = 0, \quad (3.130)$$

se escribe explícitamente en la forma

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \Psi}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} + k^2 \Psi = 0. \quad (3.131)$$

Aplicando el método de separación de variables, esto es, proponiendo $\Psi(\rho, \phi, z) = R(\rho)\Phi(\phi)Z(z)$, en la ecuación de Helmholtz (3.130) obtenemos

$$\frac{\Phi(\phi)Z(z)}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial R(\rho)}{\partial \rho} \right) + \frac{R(\rho)Z(z)}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Phi(\phi)}{\partial \phi^2} + R(\rho)\Phi(\phi) \frac{\partial^2 Z(z)}{\partial z^2} + k^2 R(\rho)\Phi(\phi)Z(z) = 0.$$

Multiplicando esta ecuación por el inverso de Ψ podemos reescribir la ecuación en la forma

$$\underbrace{\frac{1}{\rho R(\rho)} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial R(\rho)}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2 \Phi(\phi)} \frac{\partial^2 \Phi(\phi)}{\partial \phi^2}}_{\text{función de } \rho \text{ y } \phi} + \underbrace{\frac{1}{Z(z)} \frac{\partial^2 Z(z)}{\partial z^2}}_{\text{función de } z} + k^2 = 0.$$

Introduciendo la constante de separación α^2 obtenemos el par de ecuaciones

$$\frac{\partial^2 Z(z)}{\partial z^2} - \alpha^2 Z(z) = 0, \quad (3.132)$$

$$\frac{1}{\rho R(\rho)} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial R(\rho)}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2 \Phi(\phi)} \frac{\partial^2 \Phi(\phi)}{\partial \phi^2} + k^2 + \alpha^2 = 0. \quad (3.133)$$

Multiplicando esta segunda ecuación por ρ^2 , obtenemos

$$\underbrace{\frac{\rho}{R(\rho)} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial R(\rho)}{\partial \rho} \right) + (k^2 + \alpha^2)\rho^2}_{\text{sólo depende de } \rho} + \underbrace{\frac{1}{\Phi(\phi)} \frac{\partial^2 \Phi(\phi)}{\partial \phi^2}}_{\text{sólo depende de } \phi} = 0.$$

Introduciendo la nueva variable de separación ν^2 obtenemos finalmente el par de ecuaciones

$$\frac{1}{\Phi(\phi)} \frac{\partial^2 \Phi(\phi)}{\partial \phi^2} = -\nu^2 \quad (3.134)$$

$$\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial R(\rho)}{\partial \rho} \right) + \left((k^2 + \alpha^2)\rho - \frac{\nu^2}{\rho} \right) R(\rho) = 0. \quad (3.135)$$

En resumen, tenemos que la ecuación de Helmholtz en coordenadas cilíndricas, se separa en tres ecuaciones diferenciales ordinarias

$$(\nabla^2 + k^2)\Psi(\rho, \phi, z) = \begin{cases} \frac{d^2 Z(z)}{dz^2} - \alpha^2 Z(z) = 0, \\ \frac{d^2 \Phi(\phi)}{d\phi^2} + \nu^2 \Phi(\phi) = 0, \\ \frac{d^2 R(\rho)}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dR(\rho)}{d\rho} + \left(k^2 + \alpha^2 - \frac{\nu^2}{\rho^2} \right) R(\rho) = 0. \end{cases} \quad (3.136)$$

Las soluciones a las primeras dos ecuaciones ya las conocemos. Para la tercer ecuación reescalamos la coordenada radial, definiendo $x = \sqrt{k^2 + \alpha^2}\rho$, con lo cual

$$\frac{d}{d\rho} = \frac{dx}{d\rho} \frac{d}{dx} = \sqrt{k^2 + \alpha^2} \frac{d}{dx} \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2}{d\rho^2} = (k^2 + \alpha^2) \frac{d^2}{dx^2}$$

Renombrando la función $R(\rho) = y(x)$, la ecuación toma la forma

$$(k^2 + \alpha^2) \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{k^2 + \alpha^2}{x} \frac{dy}{dx} + \left(k^2 + \alpha^2 - \frac{\nu^2(k^2 + \alpha^2)}{x^2} \right) y = 0$$

$$\Rightarrow x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (x^2 - \nu^2) y = 0, \quad \text{Ecuación de Bessel.} \quad (3.137)$$

Dedicaremos un capítulo entero al estudio de las soluciones de esta ecuación.

3.4. Clase 10

El objetivo de los próximos capítulos será resolver la ecuación de Legendre (3.128), la ecuación asociada de Legendre (3.126), la ecuación de Bessel (5.1), entre otras. El método que utilizaremos para resolver estas ecuaciones es el método de soluciones en serie. En esta clase discutiremos los elementos básicos del método de soluciones en serie.

3.4.1. Puntos singulares

Para entender mejor el método de *solución en serie* o método de *Frobenius*, es importante estudiar primero el concepto de *punto singular* o *singularidad* en ecuaciones diferenciales. ¿Por qué es útil este concepto? Porque nos permite clasificar las ecuaciones diferenciales y porque nos permite discernir sobre la viabilidad de encontrar una solución en serie (Teorema de Fuch). Comencemos clasificando los puntos ordinarios y los puntos singulares de dos maneras equivalentes.

Definición 3.4.1 *Puntos ordinarios y puntos singulares.*

Sea

$$y''(x) = f(x, y(x), y'(x)). \quad (3.138)$$

Si $y(x_0)$ y $y'(x_0)$ son finitos y $y''(x_0)$ también es finito, entonces x_0 es un punto ordinario. Si $y(x_0)$ y $y'(x_0)$ son finitos y $y''(x_0) \rightarrow \infty$, entonces x_0 es un punto singular.

O equivalentemente.

Definición 3.4.2 *Si tenemos la ecuación diferencial homogénea*

$$y''(x) + P(x)y'(x) + Q(x)y(x) = 0, \quad (3.139)$$

si las funciones $P(x)$ y $Q(x)$ permanecen finitas en $x = x_0$, entonces el punto $x = x_0$ es un punto ordinario. Si $P(x)$ ó $Q(x)$ (o ambas) divergen cuando $x \rightarrow x_0$, x_0 es un punto singular.

Por razones que serán evidentes un poco después, es útil refinar esta definición y subdividir los puntos singulares en *puntos singulares regulares* y *puntos singulares irregulares*.

Definición 3.4.3 *Puntos singulares regulares.* .

Si $P(x)$ ó $Q(x)$ diverge cuando $x \rightarrow x_0$, pero los productos $(x - x_0)P(x)$ y $(x - x_0)^2Q(x)$ permanecen finitos cuando $x \rightarrow x_0$, entonces $x = x_0$ se llama un punto singular regular o no-escencial.

En otras palabras, si las singularidades no son muy severas, lo cual significa que permitimos un polo simple en $P(x)$, y un polo doble en $Q(x)$, entonces la singularidad es *regular*. Como veremos, las ecuaciones cuyos puntos singulares son todos regulares, admiten soluciones en serie mejor comportadas que aquellas con puntos singulares irregulares.

Las definiciones que hemos establecido sólo aplican en el caso en que x_0 es finito. Para analizar el punto $x \rightarrow \infty$, hacemos un cambio de variable $x \rightarrow 1/z$ y estudiamos el comportamiento de la ecuación diferencial transformada en $z = 0$. Utilizando la regla de la cadena tenemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} &= \frac{dz}{dx} \frac{d}{dz} = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{x} \right) \frac{d}{dz} = -\frac{1}{x^2} \frac{d}{dz} = -z^2 \frac{d}{dz} \\ \Rightarrow \frac{d^2}{dx^2} &= -z^2 \frac{d}{dz} \left(-z^2 \frac{d}{dz} \right) = z^2 \left(2z \frac{d}{dz} + z^2 \frac{d^2}{dz^2} \right) = z^4 \frac{d^2}{dz^2} + 2z^3 \frac{d}{dz}, \end{aligned}$$

con lo cual la ecuación diferencial $y''(x) + P(x)y'(x) + Q(x)y(x) = 0$, se reescribe como

$$\begin{aligned} z^4 \frac{d^2 y(z)}{dz^2} + 2z^3 \frac{dy(z)}{dz} - z^2 P \left(\frac{1}{z} \right) \frac{dy(z)}{dz} + Q \left(\frac{1}{z} \right) y(z) &= 0, \\ \Rightarrow z^4 \frac{d^2 y(z)}{dz^2} + \left(2z^3 - z^2 P \left(\frac{1}{z} \right) \right) \frac{dy(z)}{dz} + Q \left(\frac{1}{z} \right) y(z) &= 0, \\ \Rightarrow \frac{d^2 y(z)}{dz^2} + \left(\frac{2z - P(z^{-1})}{z^2} \right) \frac{dy(z)}{dz} + \frac{Q(z^{-1})}{z^4} y(z) &= 0. \end{aligned} \quad (3.140)$$

El comportamiento de la ecuación en $x \rightarrow \infty$, lo dan los coeficientes de la ecuación transformada (3.140) en el límite $z \rightarrow 0$

$$\frac{2z - P(z^{-1})}{z^2} \quad \text{y} \quad \frac{Q(z^{-1})}{z^4}. \quad (3.141)$$

Si estas dos expresiones permanecen finitas en el límite $z \rightarrow 0$, el punto $x = \infty$ es un punto ordinario. Si ellas no divergen más rápido que $\frac{1}{z}$ y $\frac{1}{z^2}$ respectivamente, el punto $x = \infty$ es un punto regular singular. De otra manera, es un punto singular irregular (una singularidad escencial).

Ejemplo 3.4.4 *La ecuación asociada de Legendre (3.126) es*

$$y''(x) - \frac{2x}{1-x^2} y'(x) + \left(\frac{\lambda}{1-x^2} - \frac{m^2}{(1-x^2)^2} \right) y(x) = 0$$

con lo cual

$$P(x) = -\frac{2x}{1-x^2} \quad y \quad Q(x) = \frac{\lambda}{1-x^2} - \frac{m^2}{(1-x^2)^2}.$$

Note que $P(x)$ y $Q(x)$ divergen en $x = \pm 1 \Rightarrow x_0 = \pm 1$ son puntos singulares. El resto son puntos ordinarios. Como

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} (x-1)P(x) &= \lim_{x \rightarrow 1} (x-1) \frac{2x}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x}{x+1} = 1 < \infty, \\ \lim_{x \rightarrow 1} (x-1)^2 Q(x) &= \lim_{x \rightarrow 1} (x-1)^2 \left(\frac{\lambda}{1-x^2} - \frac{m^2}{(1-x^2)^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1-x}{1+x} \lambda - \frac{m^2}{(1+x)^2} \right) \\ &= -\frac{m^2}{4} < \infty, \end{aligned}$$

concluimos que $x_0 = 1$, es un punto singular regular. Análogamente

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1} (x+1)P(x) &= \lim_{x \rightarrow -1} (x+1) \frac{2x}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x}{x-1} = 1 < \infty \\ \lim_{x \rightarrow -1} (x+1)^2 Q(x) &= \lim_{x \rightarrow -1} (x+1)^2 \left(\frac{\lambda}{1-x^2} - \frac{m^2}{(1-x^2)^2} \right) = \lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{1+x}{1-x} \lambda - \frac{m^2}{(1-x)^2} \right) \\ &= -\frac{m^2}{4} < \infty, \end{aligned}$$

y por lo tanto $x_0 = -1$, también es un punto singular regular.

Para estudiar la característica singular del punto $x = \infty$, transformamos la ecuación asociada de Legendre (3.126) haciendo el cambio de variable $x \rightarrow \frac{1}{z}$. Tenemos entonces que los coeficientes son

$$\begin{aligned} \tilde{P}(z) &= \frac{2z - P(z^{-1})}{z^2} = \frac{2z - \left(-\frac{2z^{-1}}{1-z^{-2}} \right)}{z^2} = \frac{2z - 2z^{-1} + 2z^{-1}}{(1-z^{-2})z^2} = \frac{2}{z - z^{-1}} = \frac{2z}{z^2 - 1}, \\ \tilde{Q}(z) &= \frac{Q(z^{-1})}{z^4} = \frac{\frac{\lambda}{1-z^{-2}} - \frac{m^2}{(1-z^{-2})^2}}{z^4} = \frac{\lambda}{z^2(z^2 - 1)} - \frac{m^2}{(z^2 - 1)^2} \\ &= -\left(\frac{\lambda}{z^2(1-z^2)} + \frac{m^2}{(1-z^2)^2} \right), \end{aligned}$$

con lo cual la ecuación asociada de Legendre se reescribe como

$$\frac{d^2 y(z)}{dz^2} - \frac{2z}{1-z^2} \frac{dy(z)}{dz} - \left(\frac{\lambda}{z^2(1-z^2)} + \frac{m^2}{(1-z^2)^2} \right) y(z) = 0. \quad (3.142)$$

Cuando $z \rightarrow 0$, el coeficiente $\tilde{Q}(z) \rightarrow \infty$. Por tanto $z \rightarrow 0$ ó $x \rightarrow \infty$, es un punto singular, pero

$$\lim_{z \rightarrow 0} z^2 \tilde{Q}(z) = -\lim_{z \rightarrow 0} \left(\frac{\lambda}{(1-z^2)} + \frac{m^2 z^2}{(1-z^2)^2} \right) = -\lambda < \infty$$

Concluimos entonces que $x = \infty$ es un punto singular regular.

Tenemos así que la ecuación asociada de Legendre tiene 3 puntos singulares regulares $x = (-1, 1, \infty)$. Como el cálculo que hemos realizado nunca depende del valor de m , concluimos que estos puntos son también las singularidades de la ecuación de Legendre (caso $m = 0$).

Ejemplo 3.4.5 Ecuación de Bessel

$$y''(x) + \frac{1}{x}y'(x) + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right)y(x) = 0.$$

Inspeccionando los coeficientes

$$P(x) = \frac{1}{x}, \quad y \quad Q(x) = 1 - \frac{\nu^2}{x^2}$$

concluimos que existe una singularidad en $x = 0$. Como

$$\lim_{x \rightarrow 0} xP(x) = 1, \quad y \quad \lim_{x \rightarrow 0} x^2Q(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (x^2 - \nu^2) = -\nu^2 < \infty,$$

concluimos que $x = 0$ es una singularidad regular. No hay más puntos singulares en el rango finito ¿Qué pasa en $x = \infty$? Como

$$\begin{aligned} \tilde{P}(z) &= \frac{2z - P(z^{-1})}{z^2} = \frac{2z - z}{z^2} = \frac{1}{z} \Rightarrow \lim_{z \rightarrow 0} \tilde{P}(z) \rightarrow \infty, \\ \tilde{Q}(z) &= \frac{Q(z^{-1})}{z^4} = \frac{1 - z^2\nu^2}{z^4} \Rightarrow \lim_{z \rightarrow 0} \tilde{Q}(z) \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

concluimos que $x = \infty$ es un punto singular. Y como

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow 0} z\tilde{P}(z) &= \lim_{z \rightarrow 0} z\frac{1}{z} \rightarrow 1, \\ \lim_{z \rightarrow 0} z^2\tilde{Q}(z) &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z^2 - z^4\nu^2}{z^4} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{z^2} - \nu^2 \rightarrow \infty \end{aligned}$$

Concluimos que $x = \infty$ es un punto singular irregular o esencial.

Vale la pena remarcar que a pesar de que la ecuación de Bessel tiene un punto singular irregular, este punto singular es de un tipo bastante específico, con un polo $\frac{1}{z^4}$ en el coeficiente de y . Este punto puede verse como la superposición o confluencia de dos puntos singulares regulares. Considere la situación de una ecuación diferencial con dos puntos singulares regulares en $x = a$ y $x = b$.

Un ejemplo sencillo es

$$y''(x) + P(x)y'(x) + \frac{1}{(x-a^2)(x-b)^2}y(x) = 0. \quad (3.143)$$

Por simplicidad supongamos que $P(x)$ no tiene polos en $x = a$ ó $x = b$. Estos polos son regulares, dado que

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow a} (x - a)^2 Q(x) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x - a)^2}{(x - a)^2 (x - b)^2} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{(x - b)^2} = \frac{1}{(a - b)^2} < \infty \\ \lim_{x \rightarrow b} (x - b)^2 Q(x) &= \lim_{x \rightarrow b} \frac{1}{(x - a)^2} = \frac{1}{(b - a)^2} < \infty\end{aligned}$$

Claramente si ahora elegimos los parámetros a y b iguales ($a = b$), entonces en vez de tener dos puntos singulares reales en $x = a$ y $x = b$, tendremos un sólo punto singular irregular en $x = a = b$, con un polo de cuarto orden. Concluimos entonces que

Ecuación de Bessel \sim Límite confluyente de una ecuación diferencial con 3 puntos regulares

De hecho muchas de las ecuaciones diferenciales que encontramos en física tienen *3 puntos singulares reales* o son *límites confluentes de ecuaciones con 3 puntos singulares regulares*. Estas ecuaciones son tan importantes que se ha clasificado el conjunto de Ecuaciones Diferenciales de Segundo orden con 3 puntos singulares reales y se han estudiado sus soluciones con gran detalle.

Resulta que al hacer las transformaciones de variables apropiadas (tanto las dependientes, como las independientes) es posible escribir todo ese conjunto de ecuaciones diferenciales en una forma canónica estándar, la cual se conoce como la ecuación Hipergeométrica

$$x(x - 1)y''(x) + [(a + b + 1)x - c]y'(x) + aby(x) = 0, \quad (3.144)$$

donde a , b y c son constantes. Esta ecuación tiene 3 puntos singulares regulares en $x = 0$, $x = 1$ y $x = \infty$.

A continuación mostramos una tabla donde hemos enlistado todas las ecuaciones diferenciales que estudiaremos en este curso. Como se puede observar, estas ecuaciones se pueden agrupar en tres categorías, dependiendo de los puntos singulares que cada una de ellas tiene.

Ecuación	Singularidad regular	Singularidad irregular
1. – Hipergeométrica $x(x-1)y'' + [(1+a+b)x-c]y' + aby = 0,$	$x = 0, 1, \infty$	–
2. – Legendre* $(1-x^2)y'' - 2xy' + l(l+1)y = 0,$	$x = -1, 1, \infty$	–
3. – Chebyshev $(1-x^2)y'' - xy' + n^2y = 0,$	$x = -1, 1, \infty$	–
4. – Hipergeométrica confluyente $xy'' + (c-x)y' - ay = 0,$	$x = 0$	∞
5. – Bessel $x^2y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0,$	$x = 0$	∞
6. – Laguerre* $xy'' + (1-x)y' + ay = 0,$	$x = 0$	∞
7. – Oscilador armónico simple $y'' + \omega^2y = 0,$	–	∞
8. – Hermite $y'' - 2xy' + 2\alpha y = 0,$	–	∞

3.4.2. Soluciones en serie

En sus cursos de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, usted aprendió que una ecuación diferencial ordinaria de orden N tiene N soluciones linealmente independientes. En particular si la ecuación diferencial es de segundo orden

$$y''(x) + P(x)y'(x) + Q(x)y(x) = 0, \quad (3.145)$$

entonces esta ecuación diferencial tienen exactamente dos soluciones linealmente independientes.

¿Cómo determinamos si dos soluciones son linealmente independientes? Para decidir sobre la (in)dependencia lineal de dos soluciones en su curso se introdujo el concepto de Wronskiano. ¿Cómo se define el Wronskiano? Si $y_1(x)$ y $y_2(x)$ son soluciones de la ecuación diferencial (3.145), el wronskiano se define como

$$y_1(x)y_2'(x) - y_2(x)y_1'(x).$$

Si el wronskiano se anula entonces las soluciones $y_1(x)$ y $y_2(x)$ son linealmente dependientes, si no se anula entonces son linealmente independientes.

Hemos discutido que las ecuaciones diferenciales de interés en este curso son de segundo orden, así pues, cuando estudiemos sus soluciones, debemos obtener dos soluciones linealmente independientes. Más aún, cuando resolvamos la ecuación de Legendre, Bessel,

etc., utilizaremos el método de soluciones en serie. Por tal motivo es conveniente antes de estudiar las soluciones, dar los resultados generales de lo que deberemos obtener. Estos resultados fueron mostrados por Frobenius y Fuchs.

Teorema 3.4.6 *Teorema de Frobenius y Fuchs.*

1.- Si deseamos obtener soluciones en serie de la ecuación diferencial (3.145), alrededor de un punto ordinario $x = a$ (donde por definición $P(x)$ y $Q(x)$ son regulares en $x = a$), entonces las dos soluciones linealmente independientes toman la forma

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - a)^n. \quad (3.146)$$

Los coeficientes a_n satisfacen una relación de recurrencia la cual determina todos los a_n en términos de a_0 y a_1 .

2.- Si deseamos obtener soluciones en serie de la ecuación diferencial (3.145), desarrolladas alrededor de un punto singular regular $x = a$ (donde por definición $P(x)$ y $Q(x)$ son de la forma $P(x) = \frac{F(x)}{x-a}$ y $Q(x) = \frac{G(x)}{(x-a)^2}$, con $F(x)$ y $G(x)$ funciones analíticas en $x = a$), entonces debemos intentar un desarrollo de la forma

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - a)^{n+s}. \quad (3.147)$$

Los coeficientes a_n satisfacen una relación de recurrencia y adicionalmente la cantidad s satisficará una ecuación cuadrática en s (conocida como "ecuación indicial")

$$(s - s_1)(s - s_2) = 0, \quad (3.148)$$

y pueden suceder 2 casos:

a) Si las raíces satisfacen: $s_1 - s_2 \neq$ entero, se obtiene que las 2 soluciones linealmente independientes tienen la forma (3.147) asociados a los 2 valores del índice: $s = s_1$ y $s = s_2$.

b) Si $s_1 = s_2$, y usualmente si $s_1 - s_2 =$ entero, sólo se obtiene una solución linealmente independiente mediante esta construcción (digamos $y_1(x)$). La segunda solución se puede obtener intentando un desarrollo en serie de la forma

$$y_2(x) = Ay_1(x) \log(x - a) + \sum_{n \geq 0} c_n (x - a)^{n+s}, \quad (3.149)$$

donde A es una constante. Al introducir la serie en la ecuación diferencial (3.145) s satisficará la nueva ecuación indicial

$$s^2 + [F(a) - 1]s + G(a) = 0, \quad (3.150)$$

para la cual, s_1 y s_2 son sus raíces.

3.- Si $x = a$ es un punto singular irregular de la ecuación diferencial (3.145), entonces las soluciones regulares de la ecuación pueden no existir.

La demostración de este teorema está más allá de los objetivos del curso y por lo tanto no presentamos la demostración. Sin embargo la/el lector@ interesad@ en la demostración puede consultar [9].

3.5. Clase 11

Hasta ahora hemos discutido de manera general el tipo de ecuaciones que aparecen en la física y algunas de sus propiedades, más aún, hemos enlistado el subconjunto de ecuaciones diferenciales en el que estamos interesados y hemos estudiado sus singularidades. Todas estas ecuaciones son ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden, las cuales como hemos visto, admiten sólo dos soluciones linealmente independientes. Nuestro nuevo objetivo es estudiar algunas propiedades adicionales de estas ecuaciones, así como algunas características generales de sus soluciones. Algunos de los conceptos que utilizaremos en esta clase usted ya los ha discutido en sus cursos de ecuaciones diferenciales y álgebra lineal. Comenzaremos introduciendo el concepto de operador auto-adjunto, en el contexto de ecuaciones diferenciales. Utilizaremos también los conceptos de funciones propias y valores propios. Con estos ingredientes discutiremos uno de los resultados más importantes del curso, el cual nos dice que los valores propios asociados a un operador auto-adjunto son reales y las funciones propias ortogonales. Sobra decir que usted no puede aprobar este curso si no entiende completamente este resultado. Terminaremos el capítulo discutiendo la propiedad general de completitud de un conjunto de funciones propias.

3.5.1. Ecuaciones diferenciales auto-adjuntas

Comencemos considerando una clase general de operadores diferenciales de segundo orden \mathcal{L} , de la forma

$$\mathcal{L}u(x) = \left(p_0(x) \frac{d^2}{dx^2} + p_1(x) \frac{d}{dx} + p_2(x) \right) u(x). \quad (3.151)$$

Esta ecuación es muy parecida a la ecuación (3.139), excepto que ahora tenemos una función $p_0(x)$ que también multiplica al término $u''(x)$. De hecho se puede observar que ambas ecuaciones son equivalentes si reemplazamos $P(x) = p_1(x)/p_0(x)$, $Q(x) = p_2(x)/p_0(x)$ y $\mathcal{L} \rightarrow p_0(x)\mathcal{L}$.

En la discusión siguiente supondremos que estamos interesados en estudiar esta ecuación diferencial en algún intervalo cerrado $[a, b]$, y que las funciones $p_0(x)$, $p_1(x)$ y $p_2(x)$ son funciones reales en todo el intervalo. Como hicimos en 3.4.1, debemos especificar algunas condiciones adicionales para estas tres funciones, estas son:

- La función $p_0(x)$ es diferente de cero para todo punto en el intervalo abierto (a, b) .
- Las primeras dos derivadas de la función $p_0(x)$, la primera derivada de $p_1(x)$ y la función $p_2(x)$ son continuas en el intervalo cerrado $[a, b]$.

Dado que los puntos en los que $p_0(x) = 0$, son puntos singulares de la ecuación diferencial (3.151), las condiciones anteriores significan simplemente que hemos escogido un intervalo $[a, b]$ de manera tal que en los puntos interiores del intervalo no existen puntos singulares. Los únicos puntos posibles donde pueden existir (y a menudo existen) puntos singulares son los puntos extremos del intervalo: $x = a$ y $x = b$.

Es conveniente en la teoría matemática de ecuaciones diferenciales definir el *operador adjunto* $\bar{\mathcal{L}}$ como

$$\begin{aligned}\bar{\mathcal{L}}u(x) &= \frac{d^2}{dx^2}(p_0(x)u(x)) - \frac{d}{dx}(p_1(x)u(x)) + p_2(x)u(x) \\ &= p_0(x)\frac{d^2u(x)}{dx^2} + (2p_0'(x) - p_1(x))\frac{du(x)}{dx} + (p_0''(x) - p_1'(x) + p_2(x))u(x).\end{aligned}\quad (3.152)$$

Pero ¿Qué motiva la introducción de este operador? Primero note que si consideramos la integral

$$\int_a^b v(x)\mathcal{L}u(x)dx = \int_a^b v(x)\left(p_0(x)\frac{d^2}{dx^2} + p_1(x)\frac{d}{dx} + p_2(x)\right)u(x),\quad (3.153)$$

e integramos por partes dos veces el primer término y una vez el segundo, obtenemos

$$\begin{aligned}\int_a^b v(x)\mathcal{L}u(x)dx &= \int_a^b \left(\frac{d^2}{dx^2}(p_0(x)v(x)) - \frac{d}{dx}(p_1(x)v(x)) + p_2(x)v(x)\right)u(x) \\ &\quad + \left[v(x)p_0(x)\frac{du(x)}{dx} - \frac{d(v(x)p_0(x))}{dx}u(x) + v(x)p_1(x)u(x)\right]_a^b,\end{aligned}$$

pero el integrando del primer término lo reconocemos justo como el operador adjunto actuando sobre la función $v(x)$

$$\int_a^b v(x)\mathcal{L}u(x)dx = \int_a^b (\bar{\mathcal{L}}v(x))u(x)dx + \text{términos de frontera}.\quad (3.154)$$

Si por alguna razón los términos de frontera se anularan, entonces tenemos simplemente que

$$\int_a^b v(x)\mathcal{L}u(x)dx = \int_a^b (\bar{\mathcal{L}}v(x))u(x)dx.\quad (3.155)$$

Así el operador adjunto es el operador que surge cuando los términos de frontera se anulan. Analizaremos con todo detalle estos términos de frontera más adelante.

De las ecuaciones (3.151) y (3.152) es claro que si las funciones p_0 , p_1 y p_2 están relacionadas entre ellas de una manera apropiada, entonces el operador adjunto $\bar{\mathcal{L}}$ puede ser igual al operador original \mathcal{L} . Esta relación es simplemente

$$\frac{dp_0(x)}{dx} = p_1(x).\quad (3.156)$$

Cuando esta condición se satisface se tiene que

$$\bar{\mathcal{L}}u(x) = \mathcal{L}u(x) = p_0 \frac{d^2u}{dx^2} + p_1 \frac{du}{dx} + p_2u = p_0 \frac{d^2u}{dx^2} + \frac{dp_0}{dx} \frac{du}{dx} + p_2u = \frac{d}{dx} \left(p_0 \frac{du}{dx} \right) + p_2u.$$

Definiendo: $p_0(x) \equiv p(x)$ y $p_2(x) \equiv q(x)$, escribimos finalmente la expresión del operador conocido como *auto-adjunto*

Definición 3.5.1 *Operador auto-adjunto.*

Un operador diferencial lineal de segundo orden se dice que es auto-adjunto en el intervalo $[a, b]$, si es de la forma

$$\bar{\mathcal{L}}u(x) = \mathcal{L}u(x) = \frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{du(x)}{dx} \right) + q(x)u(x), \quad (3.157)$$

donde la función $p(x) \neq 0$ en el intervalo abierto (a, b) , y las funciones: $q(x)$, $\frac{dp(x)}{dx}$ y $\frac{d^2p(x)}{dx^2}$, son continuas en el intervalo $[a, b]$.

Ejemplo 3.5.2 *Muestre que la ecuación del oscilador armónico es auto-adjunta.*

En el capítulo 3.5.2 hemos presentado la ecuación diferencial del oscilador armónico, la cual es

$$\frac{d^2y(x)}{dx^2} + \omega^2y(x) = 0, \quad (3.158)$$

esta ecuación es trivialmente auto-adjunta, ya que tiene la forma (3.157) con: $p(x) = 1$ y $q(x) = \omega^2$.

Ejemplo 3.5.3 *Muestre que la ecuación de Legendre es auto-adjunta.*

En el capítulo 3.5.2 hemos presentado la ecuación diferencial de Legendre, la cual es

$$(1 - x^2) \frac{d^2y(x)}{dx^2} - 2x \frac{dy(x)}{dx} + l(l + 1)y(x) = 0. \quad (3.159)$$

Para ver que esta ecuación es auto-adjunta basta con reescribirla como

$$\frac{d}{dx} \left((1 - x^2) \frac{dy(x)}{dx} \right) + l(l + 1)y(x) = 0, \quad (3.160)$$

la cual tiene la forma (3.157), con: $p(x) = (1 - x^2)$ y $q(x) = l(l + 1)$.

A pesar de estos ejemplos, no todas las ecuaciones diferenciales que hemos enlistado en la sección (3.4.1) corresponden a ecuaciones diferenciales auto-adjuntas, vea por ejemplo el caso de la ecuación diferencial de Hermite o el de la ecuación de Laguerre. Sin embargo la teoría de las ecuaciones lineales de segundo orden, auto-adjuntas, es completamente general porque *siempre* es posible transformar un operador diferencial lineal

de segundo orden no auto-adjunto a una forma auto-adjunta. Para convencernos de ello, suponga que el operador diferencial (3.151) no es autoadjunto. Siempre es posible multiplicar este operador por una función apropiada $h(x)$

$$h(x)\mathcal{L}u(x) = \left(h(x)p_0(x)\frac{d^2}{dx^2} + h(x)p_1(x)\frac{d}{dx} + h(x)p_2(x) \right) u(x), \quad (3.161)$$

de manera tal que si exigimos que el nuevo operador sea auto-adjunto, se debe satisfacer la condición (3.156), esto es

$$\frac{d}{dx}(h(x)p_0(x)) = h(x)p_1(x) \Rightarrow \frac{h'(x)}{h(x)} = \frac{p_1 - p_0'}{p_0} \Rightarrow \int \frac{dh}{h} = - \int \frac{dp_0}{p_0} + \int \frac{p_1}{p_0} dx,$$

de donde obtenemos finalmente que la función adecuada que buscamos es de la forma

$$h(x) = \frac{1}{p_0(x)} \exp \left(\int^x \frac{p_1(t)}{p_0(t)} dt \right). \quad (3.162)$$

Note que en esta expresión la función $p_0(x)$ aparece en el denominador, es por este motivo que hemos pedido que $p_0(x) \neq 0$ en el intervalo abierto (a, b) . Sustituyendo la expresión que hemos encontrado para $h(x)$ en el operador (3.161) obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{p_0(x)} \exp \left(\int^x \frac{p_1(t)}{p_0(t)} dt \right) \mathcal{L}u(x) &= \frac{d}{dx} \left[\exp \left(\int^x \frac{p_1(t)}{p_0(t)} dt \right) \frac{du(x)}{dx} \right] \\ &\quad + \frac{p_2(x)}{p_0(x)} \exp \left(\int^x \frac{p_1(t)}{p_0(t)} dt \right) u(x), \end{aligned} \quad (3.163)$$

que es un operador claramente auto-adjunto.

3.5.2. Problema de valores propios de Sturm-Liouville

Suponiendo ahora que tenemos un operador auto-adjunto, podemos considerar el siguiente problema de valores propios

$$\mathcal{L}u(x) + \lambda\omega(x)u(x) = 0, \quad (3.164)$$

donde λ es una constante y $\omega(x)$ es una función conocida de x , llamada una función de densidad o una función de peso¹⁴. Supondremos que $\omega(x) > 0$ en el intervalo $[a, b]$ excepto posiblemente en algunos puntos aislados para los cuales $\omega(x) = 0$.

La idea es fijarnos en ciertas soluciones $u(x)_\lambda$ de la ecuación diferencial (3.164), sujetas a ciertas condiciones de frontera en los puntos $x = a$ y $x = b$. Debido a la semejanza que existe entre este problema de valores a la frontera, con el problema algebraico de valores propios que usted estudio en sus cursos de Algebra Lineal

$$\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}, \quad (3.165)$$

¹⁴El origen de estos nombres quedará claro un poco más adelante.

donde \mathbf{A} es una matriz de $n \times n$, \mathbf{v} son los vectores propios¹⁵ y λ los valores propios¹⁶, las soluciones $u(x)_\lambda$ son llamadas funciones propias, y la constante λ correspondiente es llamada el valor propio. No existe garantía alguna para que exista una función propia $u(x)_\lambda$ para cualquier elección arbitraria del parámetro λ . En la práctica el requisito de que esta función sea una función propia, a menudo restringe los valores aceptables de λ a un conjunto discreto. En este curso veremos varios ejemplos de este hecho, en particular en el capítulo siguiente mostraremos que para las ecuaciones de Legendre y asociada de Legendre (eqs. (3.128) y (3.126) respectivamente) los valores propios están restringidos a los valores: $\lambda = l(l+1)$ con $l \in \mathbb{N}$.

El ejemplo más importante de la ecuación (3.164) que usted debe entender de manera completa, es el ejemplo de la ecuación de Schrödinger

$$H\Psi = E\Psi, \quad (3.166)$$

donde el operador diferencial \mathcal{L} se convierte en el Hamiltoniano H y el valor propio $(-\lambda)$ está asociada a la energía total E del sistema.

Ejemplo 3.5.4 *Identifique las funciones $p(x)$, $q(x)$ y $w(x)$, así como los valores propios λ en la ecuación de Legendre.*

Sabemos que la ecuación de Legendre es

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + l(l+1) = 0 \quad (3.167)$$

y la ecuación diferencial de Sturm-Liouville (3.164) es, escribiendo explícitamente el operador \mathcal{L} de la ecuación (3.157)

$$\frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{du(x)}{dx} \right) + q(x)u(x) + \lambda w(x)u(x) = 0, \quad (3.168)$$

Claramente

$$p(x) = 1 - x^2, \quad q(x) = 0, \quad w(x) = 1, \quad \text{y} \quad \lambda = l(l+1). \quad (3.169)$$

Cuando las ecuaciones del capítulo se transforman a su forma auto-adjunta, se encuentran los valores siguientes de los coeficientes y parámetros de la ecuación (3.168)

¹⁵Llamados frecuentemente en la literatura *eigenectores*.

¹⁶Llamados frecuentemente en la literatura *eigenvalores*.

Ecuación	$p(x)$	$q(x)$	λ	$w(x)$
Legendre	$1 - x^2$	0	$l(l + 1)$	1
Asociada de Legendre	$1 - x^2$	0	$l(l + 1)$	1
Chebyshev I	$(1 - x^2)^{1/2}$	0	n^2	$(1 - x^2)^{-1/2}$
Chebyshev II	$(1 - x^2)^{3/2}$	0	$n(n + 2)$	$(1 - x^2)^{1/2}$
Bessel*	x	$-\frac{n^2}{x}$	a^2	x
Laguerre	xe^{-x}	0	α	e^{-x}
Asociada de Laguerre	$x^{k+1}e^{-x}$	0	$\alpha - k$	$x^k e^{-x}$
Oscilador armónico simple	1	0	n^2	1
Hermite	e^{-x^2}	0	2α	e^{-x^2}

* La ortogonalidad de las funciones de Bessel es bastante especial. Discutiremos este caso en detalle más adelante.

3.5.3. Condiciones de Frontera

En la definición anterior de función propia se mencionó que las funciones propias $u_\lambda(x)$ debe satisfacer ciertas condiciones de frontera. Estas condiciones de frontera pueden tomar tres formas:

1.- *Condiciones de frontera de Cauchy.* El valor de una función y su derivada normal están dadas sobre la frontera. Por ejemplo en electrostática esto significaría especificar el potencial φ , y la componente normal del campo eléctrico E_n .

2.- *Condiciones de frontera de Dirichlet.* Se especifica el valor de una función sobre la frontera.

3.- *Condiciones de frontera de Neumann.* La derivada normal (el gradiente normal) de una función está especificada sobre la frontera. En el caso electrostático esto significaría que E_n y por tanto σ , la densidad de carga superficial.

Dependiendo del tipo de ecuación diferencial y del tipo de condición de frontera bajo consideración, pueden existir soluciones aceptables o no. Por ejemplo, en dos dimensiones, si resolvemos la ecuación de Poisson en una región acotada por una superficie cerrada, las condiciones de Dirichlet llevan a una solución única y estable. Si para esta misma ecuación se consideran condiciones de Neumann independientes de las condiciones de Dirichlet, obtenemos también una solución única estable, independiente de la solución que satisface la condición de Dirichlet. Por tanto, si resolvemos el problema sujeto a condiciones de frontera de Cauchy (condiciones de Dirichlet + Neumann), puede llevar a inconsistencias.

El término condiciones de frontera incluye como caso especial el concepto de condiciones iniciales. Por ejemplo, en Mecánica Clásica especificar la posición inicial x_0 y la velocidad inicial v_0 en algún problema dinámico corresponde a condiciones de frontera de Cauchy. La única diferencia en nuestro uso presente de las condiciones de frontera al

resolver las ecuaciones diferenciales 1-dimensionales es que aplicaremos las condiciones en ambos extremos del rango permitido de la variable.

Usualmente la forma de la ecuación diferencial o las condiciones de frontera sobre las soluciones garantizarán que en los extremos de nuestro intervalo (esto es, en la frontera) los siguientes productos se anulen

$$p(x)v^*(x)\frac{du(x)}{dx}\Big|_{x=a} = 0 \quad \text{and} \quad p(x)v^*(x)\frac{du(x)}{dx}\Big|_{x=b} = 0. \quad (3.170)$$

Donde las funciones $u(x)$ y $v(x)$ son soluciones de la ecuación diferencial (3.164) bajo consideración. Pero ¡note! estos son el tipo de términos de frontera que aparecen en la ecuación (3.154). Podemos sin embargo, trabajar con un conjunto menos restrictivo de condiciones de frontera

$$p(x)v^*(x)\frac{du(x)}{dx}\Big|_{x=a} = p(x)v^*(x)\frac{du(x)}{dx}\Big|_{x=b} = 0, \quad (3.171)$$

las cuales son condiciones de frontera adecuadas cuando trabajamos con sistemas físicos periódicos tales como una red cristalina.

Note que hemos escrito las dos ecuaciones anteriores en términos de la función conjugada compleja $v^*(x)$. Cuando las soluciones son reales, $v(x) = v^*(x)$ y podemos ignorar la conjugación. Sin embargo en el desarrollo exponencial de Fourier, las funciones son complejas y necesitamos considerar la función compleja conjugada.

Las propiedades (3.170) y (3.171) son muy importantes para definir el concepto de *Operador Hermítico* (como se verá en la sección siguiente). Una consecuencia de estas condiciones es que el intervalo de integración (a, b) se elige para que éstas condiciones se satisfagan. Si las soluciones son polinomios, los coeficientes $p(x)$ determinarán el rango de integración. Recuerde que también $p(x)$ determina los puntos singulares de la ecuación diferencial. Para soluciones no polinomiales, por ejemplo, $\sin x$ y $\cos x$, el rango de integración queda determinado por las propiedades de la solución.

Ejemplo 3.5.5 Elección del rango de integración.

Para $\mathcal{L} = \frac{d^2}{dx^2}$ una ecuación posible de valores propios es

$$\frac{d^2}{dx^2}y(x) + n^2y(x) = 0, \quad (3.172)$$

con funciones propias

$$u_n = \cos nx, \quad v_m = \sin mx. \quad (3.173)$$

La ecuación (3.170) es en este caso

$$-n \sin mx \sin nx \Big|_a^b = 0, \quad \text{o} \quad \cos mx \cos nx \Big|_a^b = 0, \quad (3.174)$$

intercambiando u_n y v_m . Dado que las funciones $\sin nx$ y $\cos nx$ son funciones periódicas con periodo 2π (para n y $m \in \mathbb{N}$), la ecuación (3.170) se satisface claramente si $a = x_0$ y $b = x_0 + 2\pi$.

El intervalo se elige de forma tal las condiciones de frontera se satisfagan. Para este caso (series de Fourier) las elecciones usuales son $x_0 = 0$ con lo cual el intervalo es $(0, 2\pi)$ y $x_0 = -\pi$ con lo cual el intervalo es $(-\pi, \pi)$.

Para todas las ecuaciones diferenciales que nos interesan, el intervalo de integración se elige de manera tal que las condiciones de frontera (3.170) se satisfacen. A continuación enlistamos el intervalo $[a, b]$ y el factor de peso $w(x)$ para las ecuaciones diferenciales que nos interesan.

Ecuación	a	b	$w(x)$
Legendre	-1	1	1
Asociada de Legendre	-1	1	1
Chebyshev I	-1	1	$(1 - x^2)^{-1/2}$
Chebyshev II	-1	1	$(1 - x^2)^{1/2}$
Laguerre	0	∞	e^{-x}
Asociada de Laguerre	0	∞	$x^k e^{-x}$
Oscilador armónico simple	0	2π	1
Hermite	$-\infty$	∞	e^{-x^2}

3.5.4. Operadores Hermíticos o auto-adjuntos

Estamos ahora en condiciones de definir los operadores *Hermiticos*, o *auto-adjuntos*

Definición 3.5.6 *Operador hermítico o auto-adjunto.*

Decimos que un operador \mathcal{L} es hermítico con respecto a las funciones $u(x)$ y $v(x)$ si

$$\int_a^b v^*(x) \mathcal{L}u(x) dx = \int_a^b u(x) \mathcal{L}v^*(x) dx \quad (3.175)$$

Note que esta propiedad de hermiticidad se sigue directamente del concepto de operador autoadjunto más las condiciones de frontera. No necesitamos mostrar nada, simplemente recordemos la ecuación (3.154) pero esta vez en términos de $v^*(x)$

$$\int_a^b v^*(x) \mathcal{L}u(x) dx = \int_a^b u(x) \mathcal{L}v^*(x) dx + \left[v^*(x) p(x) \frac{du(x)}{dx} - \frac{dv^*(x)}{dx} p(x) u(x) \right]_a^b. \quad (3.176)$$

Los operadores hermiticos tienen 3 propiedades extremadamente importantes en física ¹⁷

¹⁷Se le recuerda a la/el lector@ que si usted al final del curso no ha entendido plenamente estas propiedades, deberá cursar nuevamente la materia.

Propiedad 3.5.7 *Los valores propios de un operador Hermítico son reales.*

Propiedad 3.5.8 *Las funciones propias de un operador hermítico son ortogonales.*

Propiedad 3.5.9 *Las funciones propias de un operador hermítico forman un conjunto completo.*

A continuación discutimos la validez de las primeras dos propiedades. La tercer propiedad no es universal, sin embargo ésta es válida para los operadores diferenciales, lineales en la forma auto-adjunta de Sturm-Liouville que estamos interesados. En cuanto a esta tercer propiedad, aquí nos limitaremos a definir el concepto de conjunto completo.

Valores propios reales

Para mostrar la primera de estas tres propiedades, comencemos suponiendo que conocemos dos funciones propias u_i y u_j , asociadas a los valores propios correspondientes λ_i y λ_j

$$\mathcal{L}u_i + \lambda_i w u_i = 0, \quad \text{and} \quad \mathcal{L}u_j + \lambda_j w u_j = 0. \quad (3.177)$$

Tomando el complejo conjugado de la segunda ecuación

$$\mathcal{L}u_j^* + \lambda_j^* w u_j^* = 0, \quad (3.178)$$

donde se ha considerado que \mathcal{L} es un operador real (p y q son funciones reales de x) y $w(x)$ es una función real, mientras que los valores propios λ_j y las funciones propias u_k , pertenecen al campo de los complejos.

Multiplicando la primer ecuación de (3.177) por u_j^* , la ecuación (3.178) por u_i y substrayendo una de la otra obtenemos

$$u_j^* \mathcal{L}u_i - u_i \mathcal{L}u_j^* = (\lambda_j^* - \lambda_i) w u_i u_j^*. \quad (3.179)$$

Integrando sobre el rango $a \leq x \leq b$, obtenemos

$$\int_a^b u_j^* \mathcal{L}u_i dx - \int_a^b u_i \mathcal{L}u_j^* dx = (\lambda_j^* - \lambda_i) \int_a^b w u_i u_j^* dx. \quad (3.180)$$

Dado que \mathcal{L} es un operador Hermitiano, el lado izquierdo de esta ecuación se anula y

$$(\lambda_j^* - \lambda_i) \int_a^b w u_i u_j^* dx = 0. \quad (3.181)$$

Si $i = j$, la integral no puede anularse ($w(x) > 0$, excepto posiblemente en puntos aislados), excepto en el caso trivial $u_i = 0$. Así

$$\lambda_i^* - \lambda_i = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_i^* = \lambda_i, \quad (3.182)$$

lo cual establece matemáticamente que el valor propio es real. Dado que λ_i puede representar a cualquier valor propio, esto muestra la primer propiedad ¹⁸.

Funciones propias ortogonales

Si tomamos ahora $i \neq j$ y si $\lambda_i \neq \lambda_j$, la integral del producto de las funciones propias diferentes se debe anular

$$\int_a^b u_i u_j^* w dx = 0. \quad (3.183)$$

Esta condición llamada *ortogonalidad*, es el análogo continuo de la propiedad del álgebra vectorial, de que el producto escalar de dos vectores se anule. Se dice que las funciones propias $u_i(x)$ y $u_j(x)$ son ortogonales con respecto a la función de peso $w(x)$ sobre el intervalo $[a, b]$. Esta prueba de ortogonalidad no está completa. Existe un posible problema porque puede darse el caso de que $i \neq j$ pero aún así $\lambda_i = \lambda_j$. A este caso se le llama *degenerado*. Si $\lambda_i = \lambda_j$, la integral (3.183) no se necesita anular. Esto significa que las funciones propias linealmente independientes que corresponden al mismo valor propio, no son ortogonales automáticamente y que algún otro método se debe introducir, para obtener un conjunto ortogonal. A pesar de que las funciones propias en el caso degenerado puedan no ser ortogonales, éstas siempre se pueden llevar a una forma que sean ortogonales. Uno de estos métodos es el método de Gram-Schmidt, el cual no estudiaremos en este curso.

Ejemplo 3.5.10 Ortogonalidad de las series de Fourier.

Continuemos con el ejemplo (3.5.5), la ecuación de valores propios es

$$\frac{d^2}{dx^2} y(x) + n^2 y(x) = 0. \quad (3.184)$$

Físicamente esta ecuación puede describir el comportamiento de una partícula en una caja, en Mecánica Cuántica, o a una cuerda de violín vibrando. Las funciones propias (degeneradas) son $\cos nx$, $\sin nx$.

Suponiendo que $n \in \mathbb{Z}$, las integrales de ortogonalidad son

$$\begin{aligned} a) \int_{x_0}^{x_0+2\pi} \sin mx \sin nxdx &= C_n \delta_{mn}, & b) \int_{x_0}^{x_0+2\pi} \cos mx \cos nxdx &= D_n \delta_{mn}, \\ c) \int_{x_0}^{x_0+2\pi} \sin mx \cos nxdx &= 0. \end{aligned} \quad (3.185)$$

Para un intervalo de 2π el análisis anterior garantiza la delta de Kronecker en (a) y (b), pero no garantiza el cero en (c) porque la integral en (c) involucra funciones propias degeneradas. Sin embargo, un cálculo directo muestra que la integral (c) se anula siempre para todo número entero m y n .

¹⁸Este resultado es completamente análogo al que usted obtuvo en su curso de Álgebra Lineal, sobre la naturaleza de los valores propios de las matrices reales simétricas y de las matrices Hermíticas.

Es importante enfatizar que la teoría de Sturm-Liouville no dice nada acerca de los valores de C_n y D_n . Sin embargo, como usted mostró por cálculo directo en los ejercicios del capítulo anterior,

$$C_n = \begin{cases} \pi, n \neq 0, \\ 0, n = 0, \end{cases} \quad y \quad D_n = \begin{cases} \pi, n \neq 0, \\ 2\pi, n = 0. \end{cases} \quad (3.186)$$

Estas son las relaciones de ortogonalidad de las funciones base, de las series de Fourier analizadas en el capítulo anterior.

Completez de las funciones propias

La tercer propiedad importante de un operador Hermítico es que sus funciones propias forman un conjunto completo. Esta completez significa que cualquier función $f(x)$ bien comportada (al menos continua a pedazos) se puede aproximar por una serie

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi_n(x), \quad (3.187)$$

con cualquier grado de exactitud deseada. De manera más precisa, el conjunto $\varphi_n(x)$ se llama *completo* si el límite del error cuadrático medio se anula

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_a^b \left[F(x) - \sum_{n=0}^m a_n \varphi_n(x) \right]^2 w(x) dx = 0. \quad (3.188)$$

Técnicamente, la integral aquí es una integral de Lebesgue. Note que no se pide que el error se anule idénticamente en $[a, b]$ sino que únicamente la integral del error al cuadrado vaya a cero.

3.6. Problemas

1. Una partícula atómica (comportamiento cuántico) está confinada dentro de una caja rectangular de lados a , b y c . La partícula está descrita por una función de onda ψ que satisface la ecuación de onda de Schrödinger

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi = E \psi.$$

La función de onda se anula en cada una de las superficies de la caja. Como hemos visto en clase, estas condiciones imponen restricciones sobre las constantes de separación y por lo tanto sobre la energía E . Obtenga la expresión de las funciones de onda y de las energías de la partícula. ¿Cuál es la energía mínima que puede tener la partícula?

2. Muestre que el potencial electrostático dentro de una circunferencia de radio a , sujeto a la condición de frontera

$$\varphi(r = a, \phi) = \begin{cases} +V & -\pi < \phi < -\frac{\pi}{2}, \\ -V & -\frac{\pi}{2} < \phi < 0, \\ +V & 0 < \phi < \frac{\pi}{2}, \\ -V & \frac{\pi}{2} < \phi < \pi, \end{cases}$$

está dado por la relación

$$\varphi(r, \phi) = \frac{8V}{\pi} \sum_{n=2,6,10,\dots} \frac{1}{n} \left(\frac{r}{a}\right)^n \sin n\phi.$$

3. Un cubo hueco tiene paredes conductoras definidas por 6 planos, $x = y = z = 0$ y $x = y = z = a$. Las paredes $z = 0$ y $z = a$ se mantienen a un potencial constante V . Los otros cuatro lados se mantienen a potencial cero. Encuentre el potencial $\Phi(x, y, z)$ en cualquier punto dentro del cubo.

Ayuda: Este problema se puede resolver superponiendo el potencial del problema discutido en clase, donde sólo una de las paredes del cubo ($z = a$) está a potencial V y el resto se mantienen a potencial cero, con el problema análogo donde ahora la pared $z = 0$ se encuentra a potencial V y las cinco restantes a potencial cero. ¿Por qué se pueden superponer los potenciales?

4. En clase hemos visto que el operador laplaciano en coordenadas cartesianas (x, y, z) es

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

La transformación de coordenadas polares esféricas (r, θ, ϕ) a coordenadas cartesianas (x, y, z) está dada por las relaciones

$$x = r \sin \theta \cos \phi, \quad y = r \sin \theta \sin \phi, \quad z = r \cos \theta.$$

Obtenga la expresión del operador Laplaciano en coordenadas polares esféricas, partiendo de su expresión en coordenadas cartesianas y la transformación de coordenadas.

5. Verifique que las funciones siguientes son soluciones de la ecuación de Laplace

$$(a) \quad \psi_1 = \frac{1}{r} \quad y \quad (b) \quad \psi_2 = \frac{1}{2r} \ln \frac{r+z}{r-z}.$$

6. Muestre que si Ψ es una solución de la ecuación de Laplace $\nabla^2 \Psi = 0$, entonces $\partial \Psi / \partial z$ también es solución.

7. Muestre que la ecuación de Laguerre tiene una singularidad regular en $x = 0$ y una singularidad irregular en $x = \infty$.

8. Clasifique las singularidades de la ecuación Hipergeométrica

$$x(x-1)y''(x) + [(1+a+b)x - c]y'(x) + aby(x) = 0,$$

y la ecuación Hipergeométrica confluyente

$$xy''(x) + (c-x)y'(x) - ay(x) = 0.$$

9. *Teorema de Unicidad.* La función $y(x)$ satisface una ecuación diferencial homogénea lineal de segundo orden. En el punto $x = x_0$, $y(x) = y_0$, y $dy/dx = y'_0$. Muestre que $y(x)$ es única, esto es, muestre que ninguna otra solución de esta ecuación diferencial pasa a través del punto (x_0, y_0) con una pendiente y'_0 .

Ayuda: Suponga una segunda solución que satisface estas condiciones y compare las series de Taylor respectivas.

10. Analice las soluciones en serie de las siguientes ecuaciones diferenciales e investigue en que casos el coeficiente a_1 puede igualarse a cero sin pérdida alguna de información y cuando a_1 debe ser igualada a cero.

a) Legendre, b) Chebyshev, c) Bessel y d) Hermite.

11. Obten dos soluciones en serie de la ecuación hipergeométrica confluyente

$$xy'' + (c-x)y' - ay = 0.$$

Analice la convergencia de las soluciones.

12. Una buena aproximación del potencial de interacción entre dos nucleones, se puede describir por el potencial mesónico atractivo ($A < 0$)

$$V = \frac{Ae^{-ax}}{x},$$

Desarrolle una solución en serie de la ecuación de Schrödinger resultante

$$\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} + (E - V)\psi = 0,$$

hasta los primeros 3 coeficientes no nulos

$$\psi_{k=1} = a_0 \left[x + \frac{1}{2}A'x^2 + \frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}A'^2 - E' - aA'\right)x^3 + \dots \right].$$

En esta ecuación la prima indica multiplicación por $2m/\hbar^2$.

13. El criterio para la *independencia* lineal de tres vectores \mathbf{A} , \mathbf{B} y \mathbf{C} es que la ecuación

$$a\mathbf{A} + b\mathbf{B} + c\mathbf{C} = 0,$$

no tenga otra solución además de la solución trivial $a = b = c$. Utilizando las componentes $\mathbf{A} = (A_1, A_2, A_3)$ y de manera similar para los otros dos vectores, construya un criterio

utilizando un determinante, para la existencia o no existencia de una solución no trivial de los coeficientes a , b y c . Muestre que el criterio es similar a calcular el producto escalar $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \times \mathbf{C}$.

14. Utilizando el Wronskiano, muestre que el conjunto de funciones

$$\left\{ 1, \frac{x^n}{n!} \right\}, \quad \text{con } n = 1, 2, \dots, N,$$

es linealmente independiente.

15. Si el Wronskiano de dos funciones y_1 y y_2 es idénticamente cero, muestre por integración directa que

$$y_1 = cy_2,$$

esto es, y_1 y y_2 son dependientes. Suponga que las funciones tienen derivadas continuas y que al menos una de las funciones no se anula en el intervalo bajo consideración.

16. Se encuentra que el Wronskiano de dos funciones es cero en $x = x_0$. Muestre que este Wronskiano se anula para toda x y que las funciones son linealmente dependientes.

17. Las tres funciones: $\sin x$, e^x y e^{-x} son linealmente independientes, esto es, ninguna función se puede escribir como una combinación lineal de las otras dos. Muestre que el Wronskiano de $\sin x$, e^x y e^{-x} se anula pero únicamente en puntos aislados.

18. Muestre utilizando el Wronskiano, que una ecuación diferencial lineal, homogénea, de segundo orden, de la forma

$$y''(x) + P(x)y'(x) + Q(x)y(x) = 0,$$

no puede tener tres soluciones independientes. Suponga una tercera solución y muestre que el Wronskiano se anula para toda x .

19. a) Por sustitución y diferenciación directa, muestre que

$$y_2(x) = y_1(x) \int^x \frac{e^{-\int P(t)dt}}{y_1^2(s)} ds,$$

satisface la ecuación diferencial

$$y''(x) + P(x)y_2'(x) + Q(x)y_2(x) = 0.$$

Nota: La fórmula de Leibnitz para la derivada de una integral es

$$\frac{d}{d\alpha} \int_{g(\alpha)}^{h(\alpha)} f(x, \alpha) dx = \int_{g(\alpha)}^{h(\alpha)} \frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial \alpha} dx + f[h(\alpha), \alpha] \frac{dh(\alpha)}{d\alpha} - f[g(\alpha), \alpha] \frac{dg(\alpha)}{d\alpha}.$$

b) Dado que una solución de la ecuación diferencial

$$R'' + \frac{1}{r} - \frac{m^2}{r^2} R = 0,$$

es $R = r^m$, muestra que la ecuación para y_2 del inciso anterior predice una segunda solución de la forma, $R = r^{-m}$.

20. Muestre que la ecuación de Laguerre se puede escribir en forma auto-adjunta si la multiplicamos por la función e^{-x} y que $w(x) = e^{-x}$ es la función de peso.

21. Muestre que la ecuación de Hermite se puede escribir en forma auto-adjunta si la multiplicamos por la función e^{-x^2} y que esto da como resultado que $w(x) = e^{-x^2}$, es la función de densidad apropiada.

22. Muestre que la ecuación de Chebyshev (tipo I) se puede escribir en forma auto-adjunta si la multiplicamos por $(1 - x^2)^{-1/2}$ y que esto implica que $w(x) = (1 - x^2)^{-1/2}$.

23. Para el caso especial $\lambda = 0$ y $q(x) = 0$, la ecuación de valores propios auto-adjunta es

$$\frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{du(x)}{dx} \right] = 0,$$

la cual queda resuelta si

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{p(x)}.$$

Utilice este resultado para obtener una “segunda” solución de las ecuaciones diferenciales siguientes: a) Legendre, b) Laguerre y c) Hermite.

24. Considere que las soluciones de las ecuaciones de Legendre, Chebyshev, Hermite y Laguerre son polinomios. Muestre que los rangos de integración que granatizan que las condiciones de frontera para que los operadores sean Hermíticos son:

a) Legendre $[-1, 1]$, b) Chebyshev $[-1, 1]$, c) Hermite $(-\infty, \infty)$ y d) Laguerre $[0, \infty)$.

4

Polinomios de Legendre

4.1. Clase 12

Una vez discutidas las propiedades básicas de la ecuación asociada de Legendre y de la ecuación de Legendre, estamos ahora interesados en obtener la solución a dichas ecuaciones. La estrategia que seguiremos será resolver primero la ecuación de Legendre

$$(1 - x^2)y''(x) - 2xy'(x) + \lambda y(x) = 0, \quad (4.1)$$

y después la ecuación asociada de Legendre, que es más general

$$(1 - x^2)y''(x) - 2xy'(x) + \left(\lambda - \frac{m^2}{1 - x^2}\right) y(x) = 0. \quad (4.2)$$

4.1.1. Solución en serie

Para obtener la solución utilizaremos el método de Frobenius. En el capítulo anterior hemos discutido que la idea del método es proponer que la solución sea una serie de potencias en la variable independiente x . Los coeficientes quedan determinados al sustituir la serie en la ecuación diferencial e igualar los términos del mismo orden en x . Explícitamente, proponiendo la solución $y(x)$ en serie se obtiene para sus derivadas

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad \Rightarrow \quad y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} \quad \Rightarrow \quad y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}. \quad (4.3)$$

Sustituyendo estas expresiones en la ecuación de Legendre (4.1) tenemos

$$\begin{aligned}
0 &= (1-x^2) \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} - 2x \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} + \lambda \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} [n(n-1) a_n x^{n-2} - n(n-1) a_n x^n - 2n a_n x^n + \lambda a_n x^n] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda - n(n+1)) a_n x^n.
\end{aligned} \tag{4.4}$$

Dado que deseamos igualar términos del mismo orden en x , es útil correr el índice n de suma en el primer término por 2 unidades. Esto lo logramos si reetiquetamos: $n = m + 2$, con lo cual

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = \sum_{m=-2}^{\infty} (m+2)(m+1) a_{m+2} x^m = \sum_{m=0}^{\infty} (m+2)(m+1) a_{m+2} x^m.$$

Dado que en esta ecuación el índice m es mudo¹, podemos cambiar de etiqueta y renombrarlo como n , es decir cambiamos $m \rightarrow n$

$$\sum_{m=0}^{\infty} (m+2)(m+1) a_{m+2} x^m = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n.$$

Sustituyendo este resultado en la ecuación (4.4) obtenemos finalmente la ecuación

$$\sum_{n=0}^{\infty} [(n+2)(n+1) a_{n+2} + (\lambda - n(n+1)) a_n] x^n = 0. \tag{4.5}$$

Dado que esta ecuación se debe cumplir para todo x , y sus potencias x^n son linealmente independientes para n diferentes, se sigue que la única forma de que la suma sea cero es que el coeficiente de cada potencia x^n se anule por separado

$$(n+2)(n+1) a_{n+2} + (\lambda - n(n+1)) a_n = 0, \quad \forall n \geq 0, \tag{4.6}$$

obteniendo así, una relación de recurrencia para los coeficientes

$$a_{n+2} = \frac{n(n+1) - \lambda}{(n+1)(n+2)} a_n. \tag{4.7}$$

Concluimos entonces que todos los términos a_n con $n \geq 2$, se pueden obtener en términos de a_0 y a_1 . De hecho todos los términos a_n pares con $n \geq 2$, se pueden obtener en términos

¹En el lenguaje de sumas se dice que un índice es *mudo* si el índice aparece sumado. Si el índice no aparece sumado, entonces se le llama índice *libre*. A un índice mudo se le puede cambiar la etiqueta sin que las ecuaciones se alteren. Esto no se puede hacer si el índice es libre.

de a_0

$$\begin{aligned}
 a_2 &= -\frac{\lambda}{2}a_0, \\
 a_4 &= \frac{6-\lambda}{12}a_2 = -\frac{(6-\lambda)\lambda}{24}a_0, \\
 a_6 &= \frac{20-\lambda}{30}a_4 = -\frac{(20-\lambda)(6-\lambda)\lambda}{720}a_0, \\
 &\vdots
 \end{aligned} \tag{4.8}$$

y todos los términos impares se pueden obtener en términos de a_1

$$\begin{aligned}
 a_3 &= \frac{2-\lambda}{6}a_1, \\
 a_5 &= \frac{12-\lambda}{20}a_3 = \frac{(12-\lambda)(2-\lambda)}{120}a_1, \\
 a_7 &= \frac{30-\lambda}{42}a_5 = \frac{(30-\lambda)(12-\lambda)(2-\lambda)}{5040}a_1, \\
 &\vdots
 \end{aligned} \tag{4.9}$$

Note que podemos obtener 2 series como soluciones linealmente independientes a la ecuación de Legendre (4.1). Una de las soluciones contiene todas las potencias impares de x . Esto se logra si elegimos: $a_0 = 0$ y $a_1 \neq 0$. Como $a_0 = 0$, tenemos por la ecuación de recurrencia que $a_2 = a_4 = \dots = a_{2n} = \dots = 0$ (ver ec. (4.8)), con lo cual

$$\begin{aligned}
 y_1(x) &= a_1x + a_3x^3 + a_5x^5 + \dots, \\
 &= a_1 \left(x + \frac{1}{6}(2-\lambda)x^3 + \frac{1}{120}(12-\lambda)(2-\lambda)x^5 + \dots \right). \tag{4.10}
 \end{aligned}$$

La segunda solución incluye sólo potencias pares, esto se logra si: $a_0 \neq 0$ y $a_1 = 0 \Rightarrow a_3 = a_5 = a_7 = \dots = 0$,

$$\begin{aligned}
 y_2(x) &= a_0x + a_2x^2 + a_4x^4 + \dots, \\
 &= a_0 \left(1 - \frac{1}{2}\lambda x^2 - \frac{1}{24}(6-\lambda)\lambda x^4 - \frac{1}{720}(20-\lambda)(6-\lambda)\lambda x^6 + \dots \right). \tag{4.11}
 \end{aligned}$$

Tenemos así dos soluciones linealmente independientes

$$\alpha y_1(x) + \beta y_2(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = \beta = 0. \tag{4.12}$$

y la solución más general a la ecuación de Legendre es

$$y(x) = Ay_1(x) + By_2(x). \tag{4.13}$$

Este resultado no debe ser una sorpresa, como argumentamos en nuestra clase anterior, el hecho de que obtengamos directamente las dos soluciones linealmente independientes al

utilizar el método de Frobenius, es una consecuencia de que estamos obteniendo soluciones en serie alrededor del punto $x = 0$ y de que este punto es una singularidad regular.

Con lo que hemos aprendido sobre series en la Clase 1, la pregunta inmediata que se nos ocurre es ¿Convergen las series (4.10) y (4.11)? Para responder parcialmente esta pregunta, utilicemos el criterio del cociente definido en 1.1.7. De las soluciones (4.10) y (4.11) observamos que los términos sucesivos de las series difieren por una potencia de x^2 , por lo tanto el cociente de términos sucesivos es

$$R_n = \frac{a_{n+2}x^{n+2}}{a_nx^n} = \frac{n(n+1) - \lambda}{(n+1)(n+2)}x^2 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} R_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n^2}x^2 = x^2,$$

pero $x = \cos \theta$, con: $\theta \in [0, \pi] \Rightarrow -1 \leq x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq x^2 \leq 1$.

∴ Si $|x| < 1$, la serie converge,

Si $|x| = 1$, el criterio no nos da información sobre la convergencia.

En términos de la variable original, los puntos $|x| = 1$ corresponden a: $\theta = 0$ (polo norte) y $\theta = \pi$ (polo sur).

Un análisis más sofisticado muestra que la serie *diverge* en $x = \pm 1$, a menos que λ tome un valor tal que la serie termine. Es obvio que si la serie termina después de un número finito de términos, entonces no existe posibilidad de que la serie diverja.

Para que la serie termine después de un número finito de términos, una condición necesaria es que

$$a_{n+2} = \frac{n(n+1) - \lambda}{(n+1)(n+2)}a_n = 0, \quad \text{para algún } n, \quad (4.14)$$

de lo cual se concluye que λ debe de ser un entero positivo de la forma

$$\lambda = l(l+1), \quad (4.15)$$

con l un entero que podemos suponer positivo sin pérdida de generalidad.

Como un ejemplo para ilustrar el carácter divergente de la serie si ésta no termina después de un número finito de términos, consideremos la serie impar $y_1(x)$ (4.10) con $\lambda = 0$.

$$\begin{aligned} y_1(x) &= a_1 \left(x + \frac{1}{6}(2-\lambda)x^3 + \frac{1}{120}(12-\lambda)(2-\lambda)x^5 + \dots \right) \\ &= a_1 \left(x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{7}x^7 + \dots \right) \end{aligned}$$

pero de (1.31) tenemos que

$$\left. \begin{aligned} \ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \\ \ln(1-x) &= -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \end{aligned} \right\} \Rightarrow \log \left(\frac{1+x}{1-x} \right) = 2 \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots \right)$$

con lo cual

$$y_1(x) = \frac{1}{2}a_1 \log \left(\frac{1+x}{1-x} \right). \quad (4.16)$$

¿Cuál es el valor de esta serie en los polos?

$$\lim_{x \rightarrow 1} y_1(x) = \frac{1}{2}a_1 \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1+x}{1-x} \right) \rightarrow \infty, \quad (4.17)$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} y_1(x) = \frac{1}{2}a_1 \lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{1+x}{1-x} \right) \rightarrow -\infty. \quad (4.18)$$

Por lo tanto concluimos que si $\lambda = 0$, la serie $y_1(x)$ no termina y diverge en $x = \pm 1$. Para todos los otros valores de λ que no cortan la serie uno encuentra de manera similar divergencias logarítmicas en $x = \pm 1$.

Regresando a la condición para que el número de términos en la serie sea finito, note que si $\lambda = l(l+1)$, la serie se corta en a_l ya que

$$a_{l+2} = \frac{l(l+1) - l(l+1)}{(l+1)(l+2)} a_l = 0. \quad (4.19)$$

Por lo tanto el polinomio solo involucrará potencias de x hasta x^l . Si l es par, el polinomio sólo involucra potencias pares de x hasta x^l . Si l es impar, el polinomio sólo involucra potencias impares de x hasta x^l . Estas soluciones se conocen como *Polinomios de Legendre*.

Es fácil obtener las primeras soluciones. Por convención el l -ésimo polinomio de Legendre se denota por $P_l(x)$ y se normaliza de forma tal que $P_l(1) = 1$ (recuerde que ahora la solución ya es finita en $x = 1$).

El polinomio de Legendre de orden 0 corresponde a $a_0 \neq 0$, $a_1 = 0$ y se obtiene de (4.11) con $l = 0 \Rightarrow \lambda = 0$

$$y_2(x) = a_0, \Rightarrow P_0(x=1) = a_0 = 1 \Rightarrow P_0(x) = 1. \quad (4.20)$$

El polinomio de Legendre de orden 1 corresponde a $a_0 = 0$, $a_1 \neq 0$ y se obtiene de (4.10) con $l = 1 \Rightarrow \lambda = 2$

$$y_1(x) = a_1 x, \Rightarrow P_1(x=1) = a_1 = 1 \Rightarrow P_1(x) = x. \quad (4.21)$$

El polinomio de Legendre de orden 2 corresponde a $a_0 \neq 0$, $a_1 = 0$ y se obtiene de (4.11) con $l = 2 \Rightarrow \lambda = 6$

$$\begin{aligned} y_2(x) &= a_0 \left(1 - \frac{\lambda}{2} x^2 \right) = a_0 (1 - 3x^2) \Rightarrow P_2(x=1) = -2a_0 = 1 \Rightarrow a_0 = -\frac{1}{2}. \\ P_2(x) &= \frac{1}{2}(3x^2 - 1). \end{aligned} \quad (4.22)$$

El de orden 3 corresponde a $a_0 = 0$, $a_1 \neq 0$ y se obtiene de (4.10) con $l = 3 \Rightarrow \lambda = 12$

$$y_1(x) = a_1 \left(x + \frac{2-\lambda}{6} x^3 \right) = a_1 \left(x - \frac{5}{3} x^3 \right), \Rightarrow P_3(1) = -\frac{2}{3} a_1 = 1 \Rightarrow a_1 = -\frac{3}{2}.$$

$$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x). \quad (4.23)$$

y así sucesivamente. En la siguiente tabla, damos la expresión para los primeros 10 polinomios de Legendre.

l	$P_l(x)$
0	1
1	x
2	$\frac{1}{2}(3x^2 - 1)$
3	$\frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$
4	$\frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)$
5	$\frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x)$
6	$\frac{1}{16}(231x^6 - 315x^4 + 105x^2 - 5)$
7	$\frac{1}{16}(429x^7 - 693x^5 + 315x^3 - 35x)$
8	$\frac{1}{128}(6435x^8 - 12012x^6 + 6930x^4 - 1260x^2 + 35)$
9	$\frac{1}{128}(12155x^9 - 25740x^7 + 18018x^5 - 4620x^3 + 315x)$
10	$\frac{1}{256}(46189x^{10} - 109395x^8 + 90090x^6 - 30030x^4 + 3465x^2 - 63)$

Una propiedad de los polinomios de Legendre que podemos notar inmediatamente, es que tienen paridad definida. Esto es una consecuencia de que los polinomios de Legendre involucran solo potencias pares o impares de x . Tenemos entonces que

$$P_l(x) = (-1)^l P_l(-x). \quad (4.24)$$

Gráficamente, los primeros polinomios de Legendre se ven de la siguiente forma

Por último mencionemos que en el lenguaje de operadores, los polinomios de Legendre $P_l(x)$ son las funciones propias del operador diferencial

$$(x^2 - 1) \frac{d^2}{dx^2} + 2x \frac{d}{dx},$$

con valor propio $l(l+1)$.

Más adelante mostraremos un análisis similar para el caso $m \neq 0$, y obtendremos como resultado que la ecuación asociada de Legendre tiene soluciones regulares en $x = \pm 1$, solo si l es un entero no negativo, y m es un entero que toma valores en el rango $-l \leq m \leq l$. Las funciones propias correspondientes son las funciones de legendre asociadas $P_l^m(x)$ y mostraremos que éstas están relacionadas a los polinomios de Legendre $P_l(x)$ a través de la fórmula

$$P_l^m(x) = (-1)^m (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m P_l(x)}{dx^m}. \quad (4.25)$$

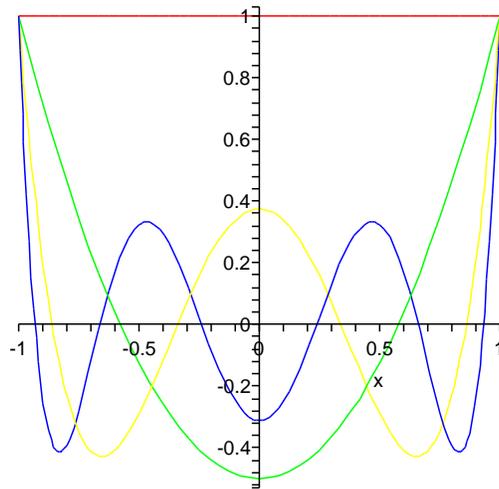


Figura 4.1: La figura muestra la gráfica de los primeros 4 polinomios de Legendre pares: $P_0(x)$ (rojo), $P_2(x)$ (verde), $P_4(x)$ (amarillo) y $P_6(x)$ (azul).

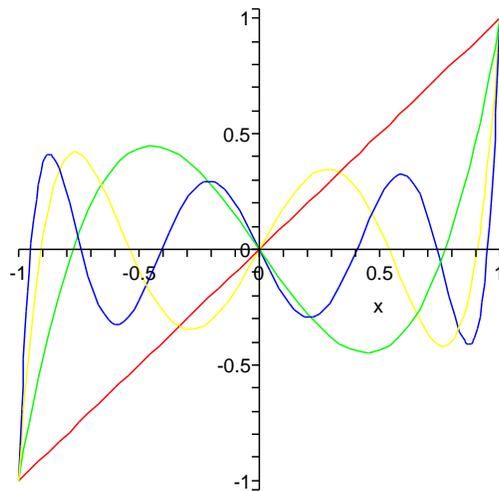


Figura 4.2: La figura muestra la gráfica de los primeros 4 polinomios de Legendre impares: $P_1(x)$ (rojo), $P_3(x)$ (verde), $P_5(x)$ (amarillo) y $P_7(x)$ (azul).

Estos resultados serán de particular importancia en su curso de Mecánica Cuántica, donde mostrará con todo detalle que los valores propios $l(l+1)\hbar^2$ con $l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, son los únicos valores que puede tomar el cuadrado del operador de momento angular orbital \hat{L}^2 y los valores propios $m\hbar$, son los únicos valores que puede tomar su componente \hat{L}_z .

4.2. Clase 13

4.2.1. La fórmula de Rodrigues

Una vez que hemos construido los primeros polinomios de Legendre es natural preguntarse si podemos obtener una expresión que nos permita calcular el polinomio l -ésimo sin necesidad de integrar el polinomio para obtener la constante de normalización, como lo hicimos en la sección anterior. Una de estas expresiones es la fórmula de Rodrigues, la cual establece que

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l} (x^2 - 1)^l. \quad (4.26)$$

Podemos demostrar que esta fórmula en realidad genera los polinomios de Legendre, en 2 pasos:

- 1.- Primero mostraremos que esta relación genera un múltiplo constante del l -ésimo polinomio de Legendre $P_l(x)$.
- 2.- Después mostraremos que la fórmula satisface la normalización $P_l(1) = 1$.

Paso 1. Consideremos la función $f_l(x) \equiv \frac{d^l}{dx^l} (1 - x^2)^l$ y mostremos que $f_l(x)$ satisface la ecuación de Legendre. Dado que $f_l(x)$ es manifiestamente un polinomio de x , debe ser algún múltiplo constante del polinomio de Legendre $P_l(x)$. Para mostrar esta afirmación reescribamos $f_l(x)$ con ayuda del teorema binomial discutido en 1.3.4

$$(1 + z)^l = \sum_{k=0}^l \binom{l}{k} z^k, \quad \text{donde} \quad \binom{l}{k} = \frac{l!}{k!(l-k)!}.$$

Considerando el caso $z = -x^2$, tenemos

$$f_l(x) = \frac{d^l}{dx^l} (1 - x^2)^l = \frac{d^l}{dx^l} \sum_{k=0}^l \binom{l}{k} (-x^2)^k = \sum_{k=0}^l (-1)^k \binom{l}{k} \frac{d^l}{dx^l} x^{2k}.$$

Al evaluar la derivada, observamos que tenemos dos resultados diferentes, dependiendo de la relación entre l y $2k$. El primer resultado corresponde al caso: $l \leq 2k$, para el cual

$$\frac{d^l}{dx^l} x^{2k} = 2k \frac{d^{l-1}}{dx^{l-1}} x^{2k-1} = \dots = (2k)(2k-1) \dots (2k-l+1) x^{2k-l} = \frac{(2k)!}{(2k-l)!} x^{2k-l}.$$

Mientras que el segundo caso corresponde a: $l > 2k$ y es igual a cero. En resumen tenemos que

$$\frac{d^l}{dx^l} x^{2k} = \begin{cases} 0 & \text{si } 2k - l < 0, \\ \frac{(2k)!}{(2k-l)!} x^{2k-l} & \text{si } 2k - l \geq 0. \end{cases} \quad (4.27)$$

Con lo cual la función f_l se reescribe como

$$\begin{aligned} f_l(x) &= \sum_{k=\frac{l}{2}}^l (-1)^k \binom{l}{k} \frac{(2k)!}{(2k-l)!} x^{2k-l} = \sum_{k=\frac{l}{2}}^l (-1)^k \frac{l!}{k!(l-k)!} \frac{(2k)!}{(2k-l)!} x^{2k-l} \\ &= \sum_{n=0}^l (-1)^{\binom{l+n}{2}} \frac{l!}{\left(\frac{l+n}{2}\right)! \left(\frac{l-n}{2}\right)!} \frac{(n+l)!}{n!} x^n, \quad \text{donde, } n \equiv 2k - l. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Claramente f_l es un polinomio de grado l . Hemos logrado ya la mitad del paso 1, ahora solo nos resta mostrar que este polinomio es en realidad proporcional a un polinomio de Legendre. Para ello podríamos checar directamente que $f_l(x)$ satisface la ecuación de Legendre (4.1). Sin embargo esto no es necesario, en la clase anterior estudiamos las soluciones en serie de la ecuación de Legendre

$$y(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$$

y mostramos que esta serie es solución si los coeficientes satisfacen la relación de recurrencia $a_{n+2} = \frac{n(n+1)-l(l+1)}{(n+1)(n+2)} a_n$. Así para mostrar que $f_l(x)$ satisface la ecuación de Legendre, basta con mostrar que sus coeficientes satisfacen esta relación de recurrencia. Los coeficientes de f_l son

$$a_n = (-1)^{\frac{l+n}{2}} \frac{l!(n+l)!}{\left(\frac{l+n}{2}\right)! \left(\frac{l-n}{2}\right)! n!}, \quad (4.29)$$

con lo cual

$$\begin{aligned} a_{n+2} &= (-1)^{\frac{l+n}{2}+1} \frac{l!(n+2+l)!}{\left(\frac{l+n+2}{2}\right)! \left(\frac{l-n-2}{2}\right)! (n+2)!} \\ &= -(-1)^{\frac{l+n}{2}} \frac{l!(n+l)!(n+l+1)(n+l+2)}{\left(\frac{l+n}{2}\right)! \left(\frac{l+n+2}{2}\right)! \frac{\left(\frac{l-n}{2}\right)!}{\frac{l-n}{2}} n!(n+1)(n+2)} \\ &= -a_n \frac{2(n+l+1) \binom{n+l+2}{\frac{l-n}{2}}}{\frac{\binom{n+l+2}{\frac{l-n}{2}}(n+1)(n+2)}{\frac{l-n}{2}}} = -a_n \frac{(l-n)(l+n+1)}{(n+1)(n+2)} \\ &= -a_n \frac{l(l+1) + ln - nl - n(n+1)}{(n+1)(n+2)} = a_n \frac{n(n+1) - l(l+1)}{(n+1)(n+2)}, \end{aligned} \quad (4.31)$$

que es la relación de recurrencia que satisfacen las soluciones de la ecuación de Legendre. Con esto concluimos el paso 1.

Paso 2. Debemos ahora fijar el valor de la constante de proporcionalidad entre los polinomios de Legendre $P_l(x)$ y las funciones $f_l(x)$. Si esta constante de proporcionalidad la llamamos α_l (el subíndice l significa que las constantes pueden depender de l), tenemos que

$$P_l(x) = \alpha_l f_l(x) = \alpha_l \frac{d^l}{dx^l} (1 - x^2)^l. \quad (4.32)$$

Ahora bien, sabemos que la condición que determina la normalización de los polinomios de Legendre es $P_l(1) = 1$, por lo tanto necesitamos calcular $P_l(1)$ utilizando la ecuación (4.32)

$$1 = P_l(x=1) = \alpha_l f_l(x=1) = \alpha_l \frac{d^l}{dx^l} (1 - x^2)^l \Big|_{x=1}. \quad (4.33)$$

Calculemos la derivada

$$\frac{d^l}{dx^l} (1 - x^2)^l \Big|_{x=1} = \left[(1+x)^l \frac{d^l}{dx^l} (1-x)^l + (1-x)^l \frac{d^l}{dx^l} (1+x)^l \right]_{x=1}.$$

Note que el segundo término, independientemente del valor de la derivada, se anulará al evaluar el binomio $(1-x)^l$ en $x=1$, por lo que el resultado viene sólo del primer término

$$\frac{d^l}{dx^l} (1 - x^2)^l \Big|_{x=1} = (1+x)^l \frac{d^l}{dx^l} (1-x)^l \Big|_{x=1} = (1+x)^l (-1)^l l! \Big|_{x=1} = (-2)^l l!$$

Con lo cual obtenemos finalmente el valor de la constante α_l de la ecuación (4.33)

$$1 = \alpha_l \frac{d^l}{dx^l} (1 - x^2)^l \Big|_{x=1} = \alpha_l (-2)^l l! \Rightarrow \alpha_l = \frac{(-1)^l}{2^l l!} \quad (4.34)$$

Obteniendo finalmente que la función generadora de los polinomios de Legendre es

$$P_l(x) = \frac{(-1)^l}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l} (1 - x^2)^l = \frac{l}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l} (x^2 - 1)^l. \quad (4.35)$$

4.2.2. Función generadora

Hemos mostrado que la fórmula de Rodrigues permite calcular los polinomios de Legendre, pero ¿Es esta fórmula la única que existe para obtener los polinomios de Legendre? La respuesta es negativa, existe otra fórmula muy útil que se conoce como la función generadora, a partir de la cual podemos generar todos los polinomios de Legendre. Esta función se suele denotar como $g(t, x)$ y es tal que si la desarrollamos en serie de Taylor en la variable t obtenemos los polinomios de Legendre. Explícitamente

$$g(t, x) \equiv (1 - 2xt + t^2)^{-1/2} = \sum_{l=0}^{\infty} P_l(x) t^l, \quad \text{con } |t| < 1. \quad (4.36)$$

Esta ecuación puede presentarse mediante un problema físico elemental. El cálculo del potencial electrostático de una carga puntual colocada en el punto $(\theta = 0, r = a)$ ó $(\theta = \pi, r = a)$ con $a = \text{constante}$. Es posible mostrar como lo hemos hecho para la fórmula de Rodrigues, que esta función generadora en efecto da origen a los polinomios de Legendre. Esto es algo que no le quitaremos el placer de comprobar por usted mismo en la tarea.

4.2.3. Relaciones de recurrencia de los polinomios de Legendre

Ciertas relaciones de recurrencia entre los polinomios de Legendre de diferente orden son muy útiles al evaluar integrales que involucran los polinomios de Legendre. Estas relaciones de recurrencia se pueden obtener de manera directa a partir de la fórmula de Rodrigues y de la ecuación de Legendre misma. Por ejemplo, utilizando la fórmula de Rodrigues podemos calcular

$$\begin{aligned}
 \frac{dP_{l+1}}{dx} &= \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{2^{l+1}(l+1)!} \frac{d^{l+1}}{dx^{l+1}} (x^2 - 1)^{l+1} \right) \\
 &= \frac{1}{2^{l+1}(l+1)!} \frac{d^{l+1}}{dx^{l+1}} ((l+1)2x(x^2 - 1)^l) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^{l+1}}{dx^{l+1}} (x(x^2 - 1)^l) \\
 &= \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l} ((x^2 - 1)^l + 2lx^2(x^2 - 1)^{l-1}) \\
 &= \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l} ((x^2 - 1)^l + 2l(x^2 - 1)(x^2 - 1)^{l-1} + 2l(x^2 - 1)^{l-1}) \\
 &= \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l} ((2l+1)(x^2 - 1)^l + 2l(x^2 - 1)^{l-1}) \\
 &= (2l+1)P_l + \frac{1}{2^{l-1}(l-1)!} \frac{d^l}{dx^l} (x^2 - 1)^{l-1}.
 \end{aligned}$$

Por otro lado

$$\frac{dP_{l-1}}{dx} = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{2^{l-1}(l-1)!} \frac{d^{l-1}}{dx^{l-1}} (x^2 - 1)^{l-1} \right) = \frac{1}{2^{l-1}(l-1)!} \frac{d^l}{dx^l} (x^2 - 1)^{l-1},$$

pero este es precisamente el último término en la ec. anterior. Concluimos entonces que

$$\frac{dP_{l+1}(x)}{dx} - \frac{dP_{l-1}(x)}{dx} = (2l+1)P_l(x). \quad (4.37)$$

A partir de esta ecuación y de la ecuación de Legendre se pueden obtener otras relaciones útiles que usted mostrará de tarea

$$(l+1)P_{l+1}(x) - (2l+1)xP_l(x) + lP_{l-1}(x) = 0, \quad (4.38)$$

$$\frac{dP_{l+1}(x)}{dx} - x \frac{dP_l(x)}{dx} - (l+1)P_l(x) = 0, \quad (4.39)$$

$$(x^2 - 1) \frac{dP_l(x)}{dx} - xlP_l(x) + lP_{l-1} = 0. \quad (4.40)$$

4.3. Clase 14

4.3.1. Relación de ortogonalidad

Los polinomios de Legendre $P_l(x)$ son el conjunto básico de soluciones regulares de la ecuación de Legendre

$$\frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{dP_l(x)}{dx} \right] + l(l+1)P_l(x) = 0 \quad (4.41)$$

y esta es una de las ecuaciones que surge (en el caso de simetría azimutal) cuando separamos variables en coordenadas polares esféricas. De hecho esta ecuación rige el comportamiento en la coordenada θ .

Una propiedad importante de los polinomios de Legendre es que forman una base del espacio Euclideo en el intervalo $[-1, 1]$, esto es, es posible escribir una función $f(x)$ continua en el intervalo $[-1, 1]$, como una serie de polinomios de Legendre

$$f(x) = \sum_{l \geq 0} a_l P_l(x). \quad (4.42)$$

No daremos una prueba rigurosa de este resultado, pero al igual que lo hicimos con las series de Fourier, mostraremos varios ejemplos concretos. Dada una función $f(x)$ particular, nuestro problema consistirá en encontrar los coeficientes adecuados a_n . Hemos aprendido ya que para obtener estos coeficientes, es necesario contar con una relación de ortogonalidad de la base. Nuestro objetivo será entonces obtener esta condición. De manera específica mostraremos que

$$\int_{-1}^1 P_l(x) P_n(x) dx = 0, \quad l \neq n \quad (4.43)$$

$$\int_{-1}^1 P_l(x) P_n(x) dx = C_n \quad l = n. \quad (4.44)$$

Para obtener estas relaciones utilizaremos la ecuación de Legendre (4.1), procediendo de la siguiente manera. Multipliquemos el polinomio de Legendre $P_n(x)$ por la ecuación de Legendre para el polinomio $P_l(x)$ y restemos el mismo producto intercambiando los índices $n \leftrightarrow l$

$$P_n \left(\frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{dP_l}{dx} \right] + l(l+1)P_l \right) - P_l \left(\frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{dP_n}{dx} \right] + n(n+1)P_n \right) = 0. \quad (4.45)$$

Integrando la variable x en el intervalo $[-1, 1]$ obtenemos

$$\int_{-1}^1 \left(P_n \frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{dP_l}{dx} \right] - P_l \frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{dP_n}{dx} \right] \right) dx + [l(l+1) - n(n+1)] \int_{-1}^1 P_l P_n dx = 0$$

Integrando por partes en la primer integral

$$\int_{-1}^1 dx \left\{ \frac{d}{dx} ((1-x^2)P_n P_l') - (1-x^2)P_n' P_l' - \frac{d}{dx} ((1-x^2)P_l P_n') + (1-x^2)P_l' P_n' \right\} \\ + [(l+1) - n(n+1)] \int_{-1}^1 P_l P_n dx = 0,$$

donde $P_n' \equiv \frac{dP_n}{dx}$. Evaluando la integral tenemos

$$\left[(1-x^2) \left(P_n \frac{dP_l}{dx} - P_l \frac{dP_n}{dx} \right) \right]_{-1}^1 + [l(l+1) - n(n+1)] \int_{-1}^1 P_l(x) P_n(x) dx = 0.$$

Como $P_l(-1)$, $P_l(1)$, $P_l'(-1)$ y $P_l'(1)$ son finitos, entonces los dos primeros términos se anulan al evaluar el factor $(1-x^2)|_{x=-1} = (1-x^2)|_{x=1} = 0$. Por lo tanto

$$[l(l+1) - n(n+1)] \int_{-1}^1 P_l(x) P_n(x) dx = 0. \quad (4.46)$$

Para que este producto se anule debe suceder que

$$l(l+1) = n(n+1) \quad \text{ó} \quad \int_{-1}^1 dx P_l(x) P_n(x) = 0. \quad (4.47)$$

Dado que $l, n \geq 0$, la condición $l(l+1) = n(n+1) \Rightarrow l = n$, y como $P_l(x)$ es un polinomio, sucede que

$$\int_{-1}^1 P_l(x) P_n(x) dx = C_l \quad \text{para} \quad l = n. \quad (4.48)$$

Si por otro lado $l \neq n$, entonces debe suceder

$$\int_{-1}^1 dx P_l(x) P_n(x) = 0, \quad \text{para} \quad l \neq n. \quad (4.49)$$

Prácticamente hemos logrado el objetivo de obtener la relación de ortogonalidad, solo nos resta calcular el valor de las constantes C_l . Para poder obtener este valor debemos decidir la normalización de los polinomios de Legendre a utilizar. Seguiremos nuevamente la *convención* de que los polinomios de Legendre están normalizados por la condición $P_l(1) = 1$.

La estrategia que seguiremos para calcular C_l es utilizar la fórmula de Rodríguez (4.26) de los polinomios de Legendre

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l} (x^2 - 1)^l,$$

en la expresión (4.48). Integrando por partes l veces, reescribiremos esta integral en una forma más sencilla. El paso clave será encontrar una relación que existe entre el coeficiente

C_l y el coeficiente C_{l-1} , lo que nos permitirá calcular la constante C_l en términos de la constante C_0 que es muy fácil de valuar. Llevemos a la práctica esta estrategia calculando primeramente

$$C_l = \int_{-1}^1 [P_l(x)]^2 dx = \frac{1}{2^{2l}(l!)^2} \int_{-1}^1 \frac{d^l}{dx^l} (x^2 - 1)^l \frac{d^l}{dx^l} (x^2 - 1)^l dx. \quad (4.50)$$

Integrando por partes tenemos

$$\begin{aligned} C_l &= \frac{1}{2^{2l}(l!)^2} \int_{-1}^1 \left\{ \frac{d}{dx} \left[\frac{d^{l-1}(x^2-1)^l}{dx^{l-1}} \frac{d^l(x^2-1)^l}{dx^l} \right] - \frac{d^{l-1}(x^2-1)^l}{dx^{l-1}} \frac{d^{l+1}(x^2-1)^l}{dx^{l+1}} \right\} dx \\ &= \frac{1}{2^{2l}(l!)^2} \left\{ \left[\frac{d^{l-1}(x^2-1)^l}{dx^{l-1}} \frac{d^l(x^2-1)^l}{dx^l} \right]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 \frac{d^{l-1}(x^2-1)^l}{dx^{l-1}} \frac{d^{l+1}(x^2-1)^l}{dx^{l+1}} dx \right\}. \end{aligned}$$

Dado que $\frac{d^{l-1}}{dx^{l-1}}(x^2-1)^l$ es un polinomio de grado $(l-1)$ en (x^2-1) el primer término se anula al evaluarlo en $x = -1, 1$ ². Integrando por partes l -veces la ecuación (4.50) obtenemos

$$C_l = \frac{(-1)^l}{2^{2l}(l!)^2} \int_{-1}^1 dx (x^2 - 1)^l \frac{d^{2l}(x^2 - 1)^l}{dx^{2l}}. \quad (4.51)$$

Utilizando el binomio de Newton (1.76), podemos evaluar la derivada del polinomio $(x^2 - 1)^l$. Claramente el polinomio es de grado $2l$, ya que

$$(x^2 - 1)^l = x^{2l} + lx^{2l-1}(-1) + \frac{1}{2!}l(l-1)x^{2l-2}(-1)^2 + \dots$$

Por lo que al derivar $2l$ veces obtenemos ³

$$\begin{aligned} \frac{d^{2l}(x^2 - 1)^l}{dx^{2l}} &= 2l(2l-1) \dots (1) = (2l)! \\ \Rightarrow C_l &= \frac{(-1)^l(2l)!}{2^{2l}(l!)^2} \int_{-1}^1 dx (x^2 - 1)^l = \frac{(2l)!}{2^{2l}(l!)^2} \int_{-1}^1 dx (1 - x^2)^l. \end{aligned} \quad (4.52)$$

²¡Ojo! $\frac{d^{l-1}(x^2-1)^l}{dx^{l-1}}$ es un polinomio de grado $l-1$ en (x^2-1) , pero $\frac{d^l(x^2-1)^l}{dx^l}$ no es polinomio en (x^2-1) . Por este motivo hemos integrado por partes. Ejemplifiquemos estas afirmaciones:

$$\begin{aligned} \frac{d(x^2-1)^2}{dx} &= 4x(x^2-1), \quad \text{polinomio de grado 1 en } (x^2-1). \\ \frac{d^2(x^2-1)^2}{dx^2} &= \frac{d}{dx}(4x(x^2-1)) = 4(x^2-1) - 8x^2, \quad \text{no es polinomio en } (x^2-1). \\ \frac{d^2(x^2-1)^3}{dx^2} &= \frac{d}{dx}(6x(x^2-1)^2) = 6(x^2-1)^2 + 24x^2(x^2-1), \quad \text{polinomio de grado 2 en } (x^2-1). \end{aligned}$$

³Si usted no está convencid@ del resultado, calcule un caso particular, por ejemplo

$$\frac{d^4(x^2-1)^2}{dx^4} = \frac{d^4}{dx^4}(x^4 - 2x^2 + 1) = \frac{d^3}{dx^3}(4x^3 - 4x) = \frac{d^2}{dx^2}(4 \cdot 3x^2 - 4) = \frac{d}{dx}4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot x = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 4!$$

Esta es la integral a la que nos referimos cuando planteamos la estrategia de cálculo para obtener C_l . La idea ahora es mostrar utilizando esta expresión que C_l está relacionada con C_{l-1} . Para ello evaluaremos la integral implícitamente, comenzando por reescribir el polinomio $(1-x^2)^l$ en la siguiente forma

$$\begin{aligned}(1-x^2)^l &= (1-x^2)(1-x^2)^{l-1} = (1-x^2)^{l-1} - x^2(1-x^2)^{l-1} \\ &= (1-x^2)^{l-1} - x^2 \frac{1}{(-2lx)} \frac{d}{dx}(1-x^2)^l = (1-x^2)^{l-1} + \frac{x}{2l} \frac{d}{dx}(1-x^2)^l,\end{aligned}$$

con lo cual la integral (4.52) la podemos reescribir como

$$\int_{-1}^1 (1-x^2)^l dx = \int_{-1}^1 (1-x^2)^{l-1} dx + \frac{1}{2l} \int_{-1}^1 x \frac{d}{dx}(1-x^2)^l dx.$$

Integrando por partes el último término

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 (1-x^2)^l dx &= \int_{-1}^1 (1-x^2)^{l-1} dx + \frac{1}{2l} \int_{-1}^1 \left[\frac{d}{dx}(x(1-x^2)^l) - (1-x^2)^l \right] dx \\ &= \int_{-1}^1 (1-x^2)^{l-1} dx + \frac{1}{2l} x(1-x^2)^l \Big|_{-1}^1 - \frac{1}{2l} \int_{-1}^1 (1-x^2)^l dx.\end{aligned}$$

Notemos que el último término del lado derecho de esta ecuación, es proporcional a la integral que deseamos evaluar originalmente. Agrupando estos dos términos se tiene

$$\begin{aligned}\left(1 + \frac{1}{2l}\right) \int_{-1}^1 (1-x^2)^l dx &= \int_{-1}^1 (1-x^2)^{l-1} dx \\ \Rightarrow (2l+1) \int_{-1}^1 (1-x^2)^l dx &= 2l \int_{-1}^1 (1-x^2)^{l-1} dx.\end{aligned}\tag{4.53}$$

Esta ecuación relaciona la integral de $(1-x^2)^l$ con la integral de $(1-x^2)^{l-1}$, por lo tanto al sustituirla en la ecuación (4.52) para C_l nos producirá una ecuación que relaciona C_l con C_{l-1} , como habíamos anunciado. Explícitamente

$$\begin{aligned}C_l &= \frac{(2l)!}{2^{2l}(l!)^2} \int_{-1}^1 (1-x^2)^l dx = \frac{(2l)!}{2^{2l}(l!)^2} \frac{2l}{(2l+1)} \int_{-1}^1 (1-x^2)^{l-1} dx \\ &= \frac{2l}{2l+1} \frac{2l(2l-1)(2l-2)!}{2^{2l-2}2^2 l^2 ((l-1)!)^2} \int_{-1}^1 (1-x^2)^{l-1} dx \\ &= \frac{2l-1}{2l+1} \frac{[2(l-1)]!}{2^{2(l-1)}((l-1)!)^2} \int_{-1}^1 (1-x^2)^{l-1} dx = \frac{2l-1}{2l+1} C_{l-1}.\end{aligned}$$

Obteniendo finalmente la relación

$$(2l+1)C_l = (2l-1)C_{l-1} = [2(l-1)+1]C_{l-1}.\tag{4.54}$$

Concluimos entonces que la cantidad $(2l + 1)C_l$ es independiente de l , en particular es cierta para $l = 0$

$$C_0 = 3C_1 = 5C_2 = 7C_3 = \dots = (2l + 1)C_l. \quad (4.55)$$

Pero evaluar directamente la constante C_0 es muy sencillo. De la definición general (4.52) de C_l tenemos para C_0

$$C_0 = \frac{0!}{2^0(0!)^2} \int_{-1}^1 (1 - x^2)^0 dx = \int_{-1}^1 dx = 2. \quad (4.56)$$

Combinando las ecuaciones (4.55) y (4.56) concluimos que

$$C_l = \frac{C_0}{2l + 1} = \frac{2}{2l + 1} \Rightarrow \int_{-1}^1 [P_l(x)]^2 dx = \frac{2}{2l + 1}. \quad (4.57)$$

Obteniendo así de manera completa la relación de ortogonalidad de los polinomios de Legendre

$$\int_{-1}^1 P_n(x)P_l(x) dx = \frac{2}{2l + 1} \delta_{n,l}. \quad (4.58)$$

Regresando a la ecuación (4.42), estamos ahora en condiciones de poder determinar las constantes a_l en el desarrollo de la función $f(x)$. Para ello multipliquemos ambos lados de la ecuación por $P_n(x)$ e integremos sobre la variable x

$$\int_{-1}^1 P_n(x)f(x) dx = \sum_{l \geq 0} a_l \int_{-1}^1 P_n(x)P_l(x) dx = \sum_{l \geq 0} a_l \frac{2}{2l + 1} \delta_{n,l} = \frac{2}{2n + 1} a_n.$$

Depejando el coeficiente a_n obtenemos finalmente

$$a_n = \frac{2n + 1}{2} \int_{-1}^1 P_n(x)f(x) dx. \quad (4.59)$$

En la práctica es bastante útil utilizar la fórmula de Rodríguez para evaluar esta integral

$$a_n = \frac{2n + 1}{2} \int_{-1}^1 \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n f(x) dx = \frac{2n + 1}{2^{n+1} n!} \int_{-1}^1 f(x) \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n dx$$

Integrando por partes una vez obtenemos

$$a_n = \frac{2n + 1}{2^{n+1} n!} \left[f(x) \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} (x^2 - 1)^n \Big|_{-1}^1 - \int_{-1}^1 \frac{df(x)}{dx} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} (x^2 - 1)^n dx. \right]$$

Al igual que en ocasiones anteriores, el primer término se anula al evaluarlo en $x = \pm 1$ debido a que es un polinomio en $x^2 - 1$. Integrando por partes $(l - 1)$ veces más obtenemos

$$a_n = \frac{2n + 1}{2^{n+1} n!} (-1)^n \int_{-1}^1 (x^2 - 1)^n \frac{d^n f(x)}{dx^n} dx = \frac{2n + 1}{2^{n+1} n!} \int_{-1}^1 (1 - x^2)^n \frac{d^n f(x)}{dx^n} dx. \quad (4.60)$$

Hagamos un ejemplo para entender mejor la idea de desarrollar una función en términos de los polinomios de Legendre.

Ejemplo 4.3.1 *Escribamos el polinomio cuadrático $f(x) = ax^2 + bx + c$ en términos de los polinomios de Legendre*

$$ax^2 + bx + c = \sum_{l \geq 0} a_l P_l(x). \quad (4.61)$$

El problema consiste en calcular los coeficientes a_l que me permitan escribir al polinomio cuadrático en términos de los polinomios de Legendre. Para ello utilizaremos la expresión (4.60). Para el primer coeficiente tenemos

$$a_0 = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(x) dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (ax^2 + bx + c) dx = \frac{1}{2} \left[a \frac{x^3}{3} + b \frac{x^2}{2} + cx \right]_{-1}^1 = \frac{a}{3} + c. \quad (4.62)$$

De manera similar tenemos para el resto de los coeficientes

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{3}{4} \int_{-1}^1 (1-x^2) \frac{d(ax^2 + bx + c)}{dx} dx = \frac{3}{4} \int_{-1}^1 (1-x^2)(2ax + b) dx = \frac{3}{4} \int_{-1}^1 b(1-x^2) dx \\ &= \frac{3}{4} b \left[x - \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^1 = \frac{3}{2} b \left(1 - \frac{1}{3} \right) = b. \end{aligned} \quad (4.63)$$

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{5}{8 \cdot 2} \int_{-1}^1 (1-x^2)^2 \frac{d^2(ax^2 + bx + c)}{dx^2} dx = \frac{5}{16} \int_{-1}^1 (1-x^2)^2 2adx \\ &= \frac{5a}{8} \int_{-1}^1 (1-2x^2+x^4) dx = \frac{5a}{8} 2 \left[x - \frac{2}{3}x^3 + \frac{x^5}{5} \right]_0^1 = \frac{2}{3}a. \end{aligned} \quad (4.64)$$

El resto de los coeficientes son cero $a_3 = a_4 = a_5 = \dots = 0$, dado que $\frac{d^n}{dx^n}(ax^2 + b + c) = 0$, para todo $n \geq 3$.

Por lo tanto

$$ax^2 + b + c = \left(\frac{1}{3}a + c \right) P_0(x) + bP_1(x) + \frac{2}{3}aP_2(x). \quad (4.65)$$

Este resultado no debería ser una sorpresa dado que sabemos que $P_2(x)$ mismo, es un polinomio de grado 2. Recuerde que $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = x$, $P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$. Más aún, podemos inferir que en particular si $f(x)$ es un polinomio de grado n , dado que todas las derivadas $\frac{d^l f(x)}{dx^l} = 0$ para $l > n$, entonces todos los coeficientes $a_l = 0$ para $l > n$ en el desarrollo, y por tanto, el polinomio podrá escribirse como una combinación lineal de los primeros n polinomios de Legendre.

De manera más general, si la función $f(x)$ que estamos desarrollando no es un polinomio en x , obtendremos una serie infinita $f(x) = \sum_{l \geq 0} a_l P_l(x)$.

4.4. Clase 15

4.4.1. Ecuación de Laplace con simetría azimutal

Como un ejemplo de las situaciones físicas en las que aparecen los Polinomios de Legendre, estudiemos la solución a la ecuación de Laplace en problemas con simetría azimutal.

En una clase anterior hemos realizado la separación de variables para la ecuación de Helmholtz en coordenadas esféricas. Proponiendo

$$\Psi(r, \theta, \phi) = \frac{1}{r} R(r) Y(\theta, \phi), \quad (4.66)$$

separamos la ecuación de Helmholtz en dos ecuaciones: una ecuación diferencial parcial y una ecuación diferencial ordinaria

$$\nabla_{(\theta, \phi)}^2 Y = -\lambda Y, \quad \frac{d^2 R}{dr^2} = \left(\frac{\lambda}{r^2} - k^2 \right) R(r). \quad (4.67)$$

Si consideramos funciones que sean independientes del ángulo azimutal $\phi \Rightarrow m = 0$,

$$\Psi(r, \theta) = \frac{1}{r} R(r) \Theta(\theta) \quad (4.68)$$

donde $\Theta(\theta)$ y $R(r)$ satisfacen

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d}{d\theta} \Theta + \lambda \Theta \right) = 0 \quad \text{y} \quad \frac{d^2 R(r)}{dr^2} = \left(\frac{\lambda}{r^2} - k^2 \right) R(r). \quad (4.69)$$

Hemos mostrado que las funciones $\Theta(\theta)$ son regulares en los polos norte y sur de la esfera, únicamente si $\lambda = l(l+1)$ donde l es un entero (el cual puede asumirse sin pérdida de generalidad no negativo). Las funciones $\Theta(\theta)$ son entonces los polinomios de Legendre con $\Theta(\theta) \sim P_l(\cos \theta)$.

En el caso de la ecuación de Laplace: $k = 0$ y la función $R(r)$ satisface la ecuación

$$\frac{d^2 R(r)}{dr^2} = \frac{l(l+1)}{r^2} R(r). \quad (4.70)$$

Las soluciones a esta ecuación diferencial son

$$R(r) \sim r^{l+1} \quad \text{y} \quad R(r) \sim r^{-l} \quad (4.71)$$

Podemos concluir entonces que la solución azimutal más general de la ecuación de Laplace $\nabla^2 \Psi(r, \theta) = 0$, en coordenadas polares esféricas, se puede escribir como

$$\Psi(r, \theta) = \sum_{l \geq 0} (A_l r^l + B_l r^{-l-1}) P_l(\cos \theta). \quad (4.72)$$

Podemos utilizar este resultado para poder resolver problemas donde se desee conocer el potencial gravitacional(electrostático) de distribuciones de masa(carga) con simetría azimutal.

Ejemplo 4.4.1 Como ejemplo resolvamos un problema típico de electrostática. Consideremos una esfera de radio a , cuyo potencial electrostático en su superficie posee simetría azimutal y está dado por la función $V(\theta)$, esto es, $\Psi(r = a, \theta) = V(\theta)$. El problema consiste en calcular el potencial electrostático $\Psi(r, \theta)$ en todo punto del espacio.

La solución a este problema se divide en dos partes, se debe obtener el potencial $\Psi_d(r, \theta)$ dentro de la esfera ($r < a$) y $\Psi_f(r, \theta)$ fuera de la esfera ($r > a$). Desde luego, ambos potenciales deben coincidir sobre la superficie de la esfera, $\Psi_d(a, \theta) = \Psi_f(a, \theta)$. Tanto dentro de la esfera como fuera de la esfera, el potencial satisface una condición adicional. Si no existen cargas eléctricas en el origen, el potencial debe anularse ahí, por lo cual el potencial dentro de la esfera debe ser finito, analíticamente: $\Psi_d(0, \theta) < \infty$. La condición para el potencial fuera de la esfera es que debe anularse en infinito, esto es: $\lim_{r \rightarrow \infty} \Psi_f(r, \theta) \rightarrow 0$.

Hemos visto ya que la solución más general posible a la ecuación de Laplace, para problemas con simetría azimutal está dada por la ecuación (4.72). Así en nuestro caso la solución debe ser de la forma

$$\Psi_d(r, \theta) = \sum_{l \geq 0} (A_l r^l + B_l r^{-(l+1)}) P_l(\cos \theta), \quad r \leq a, \quad (4.73)$$

$$\Psi_f(r, \theta) = \sum_{l \geq 0} (C_l r^l + D_l r^{-(l+1)}) P_l(\cos \theta), \quad r \geq a, \quad (4.74)$$

donde las constantes A_l , B_l , C_l y D_l , quedan determinadas por las condiciones de frontera.

Obtengamos primeramente el potencial dentro de la esfera. Note que si $A_l \neq 0$ y $B_l \neq 0$, para toda l , entonces al analizar la condición del potencial en el origen tenemos

$$\lim_{r \rightarrow 0} \Psi_d(r, \theta) = \lim_{r \rightarrow 0} \sum_{l \geq 0} (A_l r^l + B_l r^{-(l+1)}) P_l(\cos \theta) = \lim_{r \rightarrow 0} \sum_{l \geq 0} B_l r^{-(l+1)} P_l(\cos \theta) \rightarrow \infty.$$

Así si queremos que el potencial sea finito en el origen, la única posibilidad es que todos los coeficientes $B_l = 0$ y por lo tanto el potencial dentro de la esfera debe ser de la forma

$$\Psi_d(r, \theta) = \sum_{l \geq 0} A_l r^l P_l(\cos \theta), \quad r \leq a. \quad (4.75)$$

¿Cómo encontramos los coeficientes A_l ? de la otra condición de frontera

$$\Psi_d(r = a, \theta) = V(\theta), \quad \Rightarrow \quad V(\theta) = \sum_{l \geq 0} A_l a^l P_l(\cos \theta), \quad (4.76)$$

y de la relación de ortogonalidad de los polinomios de Legendre

$$\int_{-1}^1 dx P_l(x) P_n(x) = \int_0^\pi \sin \theta P_l(\cos \theta) P_n(\cos \theta) d\theta = \frac{2}{2l+1} \delta_{l,n}, \quad (4.77)$$

donde en la segunda integral hemos realizado el cambio de variable $x = \cos \theta \Rightarrow dx = -\sin \theta d\theta$. Recuerde, la técnica consiste en multiplicar ambos lados de la condición de

frontera (4.76) por $P_n(\cos \theta)$ e integrar sobre todo el intervalo de definición de la variable θ .

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \sin \theta P_n(\cos \theta) V(\theta) d\theta &= \sum_{l \geq 0} A_l a^l \int_0^\pi \sin \theta P_n(\cos \theta) P_l(\cos \theta) d\theta \\ &= \sum_{l \geq 0} A_l a^l \frac{2}{2l+1} \delta_{l,n} = A_n a^n \frac{2}{2n+1}. \end{aligned}$$

Despejando el coeficiente A_n de esta ecuación, obtenemos finalmente

$$A_n = \frac{2n+1}{2a^n} \int_0^\pi \sin \theta P_n(\cos \theta) V(\theta) d\theta = \frac{2n+1}{2a^n} \int_{-1}^1 P_n(x) V(x) dx. \quad (4.78)$$

El siguiente paso es encontrar el potencial fuera de la esfera. Para ello notemos que si los coeficientes $C_l \neq 0$ y $D_l \neq 0$, para todo l entonces

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \Psi_f(r, \theta) = \lim_{r \rightarrow \infty} \sum_{l \geq 0} (C_l r^l + D_l r^{-(l+1)}) P_l(\cos \theta) = \lim_{r \rightarrow \infty} \sum_{l \geq 0} C_l r^l P_l(\cos \theta) \rightarrow \infty.$$

Pero la condición de frontera en infinito nos dice que $\lim_{r \rightarrow \infty} \Psi_f(r, \theta) \rightarrow 0$. Concluimos entonces que la única manera de que se satisfaga esta condición es que los coeficientes $C_l = 0$, para toda l . Por lo tanto el potencial fuera de la esfera es de la forma

$$\Psi_f(r, \theta) = \sum_{l \geq 0} D_l r^{-(l+1)} P_l(\cos \theta). \quad (4.79)$$

¿Cómo encontramos los coeficientes D_l ? nuevamente de la condición de frontera sobre la superficie de la esfera. Para ello podemos proceder como lo hicimos para Ψ_d , sin embargo no es necesario repetir este procedimiento, basta con recordar que los potenciales satisfacen la condición

$$\Psi_d(a, \theta) = \Psi_f(a, \theta) \Rightarrow \sum_{l \geq 0} A_l a^l P_l(\cos \theta) = \sum_{l \geq 0} D_l a^{-(l+1)} P_l(\cos \theta),$$

de donde obtenemos igualando término a término que

$$A_l a^l = D_l a^{-(l+1)} \Rightarrow D_l = A_l a^{2l+1}. \quad (4.80)$$

y por tanto el potencial fuera de la esfera. En resumen, hemos encontrado que la solución es

$$\Psi_d(r, \theta) = \sum_{l \geq 0} A_l a^l P_l(\cos \theta), \quad r \leq a, \quad (4.81)$$

$$\Psi_f(r, \theta) = \sum_{l \geq 0} A_l \frac{a^{l+1}}{r^{l+1}} P_l(\cos \theta), \quad r \geq a, \quad (4.82)$$

donde los coeficientes están dados por la relación (4.78).

Una vez conocida la función $V(\theta)$ podemos calcular el potencial explícitamente. Para ejemplificar consideremos el caso en que el potencial sobre la esfera toma la forma

$$V(\theta) = \begin{cases} +V, & 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \\ -V, & \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi, \end{cases} \quad \text{con } V = \text{cte.} \quad (4.83)$$

En este caso la relación (4.78) es

$$A_l = \frac{2l+1}{2a^l} \left[V \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta P_l(\cos \theta) d\theta - V \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin \theta P_l(\cos \theta) d\theta \right],$$

o en términos de la coordenada x

$$A_l = \frac{2l+1}{2a^l} \left[V \int_0^1 P_l(x) dx - V \int_{-1}^0 P_l(x) dx \right].$$

Como hemos visto, los polinomios de Legendre tienen paridad bien definida $P_l(x) = (-1)^l P_l(-x)$. Así si hacemos el cambio de variable $x \rightarrow -x$ en la segunda integral de la ecuación anterior obtenemos

$$A_l = \frac{(2l+1)V}{2a^l} \left[\int_0^1 P_l(x) dx - \int_0^1 (-1)^l P_l(x) dx \right] = \frac{(2l+1)V}{2a^l} (1 - (-1)^l) \int_0^1 P_l(x) dx.$$

Concluimos entonces que $A_l = 0$, si l es par. Si l es impar

$$A_l = \frac{(2l+1)V}{a^l} \int_0^1 P_l(x) dx = \frac{(2l+1)V}{a^l} \left(-\frac{1}{2} \right)^{\frac{l-1}{2}} \frac{(2l+1)(l-2)!!}{2 \left(\frac{l+1}{2} \right)!}. \quad (4.84)$$

4.5. Clase 16

4.5.1. Las funciones asociadas de Legendre

Hasta ahora hemos estudiado las soluciones a la ecuación de Legendre, la cual como hemos discutido anteriormente, constituye un caso particular de la ecuación asociada de Legendre, correspondiente al valor $m = 0$. Nuestro objetivo es obtener ahora las soluciones a la ecuación asociada de Legendre para todo valor posible de m

$$\frac{d}{dx} \left((1-x^2) \frac{dy}{dx} \right) + \left(\lambda - \frac{m^2}{1-x^2} \right) y = 0. \quad (4.85)$$

Como mostraremos en detalle, es posible construir las soluciones de esta ecuación en términos de los polinomios de Legendre $P_l(x)$, que ya hemos estudiado. Específicamente

veremos que las soluciones $y(x)$ son proporcionales a derivadas de los polinomios de Legendre $y(x) \sim \frac{d^m P_l(x)}{dx^m}$. La estrategia para obtener las soluciones será la siguiente: El primer paso consistirá en hacer una propuesta de solución en términos de una función $w(x)$ por determinar, esto es, propondremos que $y(x) \sim w(x)$. Al introducir esta propuesta en la ecuación Asociada de Legendre, obtendremos una ecuación equivalente pero esta vez para la función $w(x)$. El segundo paso consistirá en obtener esta misma ecuación equivalente, pero ahora comenzando de la ecuación de Legendre ordinaria, derivada m veces. Dado que al final obtendremos la misma ecuación, lo único que nos restará será identificar la forma de la solución $w(x)$ en términos de derivadas de los polinomios de Legendre $P_l(x)$. Como las soluciones $y(x)$ de la ecuación asociada de Legendre original son proporcionales a las funciones $w(x)$, habremos obtenido las soluciones buscadas.

Comencemos con el primer paso. Propongamos que las soluciones de la ecuación asociada de Legendre son de la forma

$$y(x) = (1 - x^2)^{\frac{m}{2}} w(x), \quad (4.86)$$

con lo cual

$$\frac{dy}{dx} = -2x \frac{m}{2} (1 - x^2)^{\frac{m}{2}-1} w(x) + (1 - x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{dw}{dx}.$$

Sustituyendo esta expresión de la derivada dy/dx en la ecuación asociada de Legendre tenemos

$$\frac{d}{dx} \left(-mx(1 - x^2)^{\frac{m}{2}} w + (1 - x^2)^{\frac{m}{2}+1} \frac{dw}{dx} \right) + \left(\lambda - \frac{m^2}{1 - x^2} \right) (1 - x^2)^{\frac{m}{2}} w = 0.$$

Evaluando explícitamente la derivada

$$\begin{aligned} & -m(1 - x^2)^{\frac{m}{2}} w + m^2 x^2 (1 - x^2)^{\frac{m}{2}-1} w - mx(1 - x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{dw}{dx} - 2x \left(\frac{m}{2} + 1 \right) (1 - x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{dw}{dx} \\ & + (1 - x^2)^{\frac{m}{2}+1} \frac{d^2 w}{dx^2} + \lambda (1 - x^2)^{\frac{m}{2}} w - m^2 (1 - x^2)^{\frac{m}{2}-1} w = 0. \end{aligned}$$

Factorizando $(1 - x^2)^{\frac{m}{2}}$ obtenemos finalmente

$$\begin{aligned} 0 &= (1 - x^2)^{\frac{m}{2}} [(1 - x^2)w'' - 2(m + 1)xw' + \lambda w - mw + m^2(x^2 - 1)(1 - x^2)^{-1}w] \\ 0 &= (1 - x^2)^{\frac{m}{2}} [(1 - x^2)w'' - 2(m + 1)xw' + (\lambda - m(m + 1))w]. \end{aligned}$$

Para que esta ecuación se satisfaga, dado que en general $(1 - x^2) \neq 0$, se debe satisfacer que

$$(1 - x^2)w'' - 2(m + 1)xw' + (\lambda - m(m + 1))w = 0. \quad (4.87)$$

Así, si somos capaces de encontrar una función $w(x)$ que resuelva esta ecuación, habremos obtenido una solución de la ecuación asociada de Legendre (4.85) de la forma (4.86).

Para encontrar la forma de $w(x)$ obtengamos nuevamente la ecuación (4.87), pero ahora de una forma diferente. Supongamos que tenemos una solución para la ecuación de Legendre ordinaria

$$(1 - x^2)P'' - 2xP' + \lambda P = 0. \quad (4.88)$$

Si ahora diferenciamos esta ecuación m -veces

$$\frac{d^m}{dx^m}[(1-x^2)P'' - 2xP' + \lambda P] = 0,$$

tenemos utilizando la relación⁴

$$\begin{aligned} \frac{d^m}{dx^m}(fg) &= f \frac{d^m g}{dx^m} + m \frac{df}{dx} \frac{d^{m-1} g}{dx^{m-1}} + \frac{m(m-1)}{2!} \frac{d^2 f}{dx^2} \frac{d^{m-2} g}{dx^{m-2}} \\ &\quad + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!} \frac{d^3 f}{dx^3} \frac{d^{m-3} g}{dx^{m-3}} + \cdots + \frac{d^n f}{dx^m} g, \end{aligned} \quad (4.89)$$

que

$$(1-x^2) \frac{d^{m+2} P}{dx^{m+2}} + m(-2x) \frac{d^{m+1} P}{dx^{m+1}} + \frac{m(m-1)}{2} (-2) \frac{d^m P}{dx^m} - 2x \frac{d^{m+1} P}{dx^{m+1}} - 2m \frac{d^m P}{dx^m} + \lambda \frac{d^m P}{dx^m} = 0.$$

Factorizando las derivadas del mismo orden, esta ecuación implica que

$$\begin{aligned} (1-x^2) \frac{d^{m+2} P}{dx^{m+2}} - 2(m+1)x \frac{d^{m+1} P}{dx^{m+1}} + (\lambda - 2m - m(m-1)) \frac{d^m P}{dx^m} &= 0 \\ \Rightarrow (1-x^2) \frac{d^{m+2} P}{dx^{m+2}} - 2(m+1)x \frac{d^{m+1} P}{dx^{m+1}} + [\lambda - m(m+1)] \frac{d^m P}{dx^m} &= 0. \end{aligned} \quad (4.90)$$

Comparando esta última ecuación con la ecuación (4.87), vemos que si tomamos $w = \frac{d^m P}{dx^m}$, entonces ambas ecuaciones son iguales y por tanto hemos construido una solución de la ecuación (4.87) en términos de una solución P de la ec. de Legendre (4.88). Recordando que los polinomios de Legendre están etiquetados por el número natural l , concluimos que las funciones $w(x)$ están etiquetadas por los números l y m . Juntando todos los ingredientes tenemos que las soluciones (4.86) de la ecuación asociada de Legendre también dependerán de las mismas dos etiquetas. Definimos así, los polinomios asociados de Legendre $P_l^m(x)$ como

$$P_l^m \equiv (-1)^m (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{dx^m} P_l(x), \quad (4.91)$$

los cuales son las soluciones de la ecuación asociada de Legendre

$$\frac{d}{dx} \left((1-x^2) \frac{dP_l^m}{dx} \right) + \left(l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right) P_l^m = 0. \quad (4.92)$$

Dado que los polinomios de Legendre $P_l(x)$ son regulares en el intervalo $x \in [-1, 1]$, los polinomios asociados de Legendre $P_l^m(x)$ también son regulares en el mismo intervalo. Se

⁴Usted puede convencerse fácilmente que la relación es correcta, calculando las derivadas para los primeros números naturales, $m = 1$ y $m = 2$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(fg) &= \frac{df}{dx}g + f \frac{dg}{dx}. \\ \frac{d^2}{dx^2}(fg) &= \frac{d}{dx} \frac{df}{dx}g + f \frac{d^2g}{dx^2} = \frac{d^2f}{dx^2}g + 2 \frac{df}{dx} \frac{dg}{dx} + f \frac{d^2g}{dx^2}. \end{aligned}$$

sobre entiende que estamos considerando que m es un número entero no negativo, para que $\frac{d^m}{dx^m}$ tenga sentido. Dada nuestra estrategia para obtener las soluciones, es claro que m y l deben satisfacer la desigualdad $m \leq l$, ya que de otro manera $\frac{d^m P_l}{dx^m} = 0$, porque los polinomios de Legendre son polinomios de grado l en x . Sin embargo recordando la fórmula de Rodríguez (4.26) para los $P_l(x)$, obtenemos la función generadora de los polinomios asociados de Legendre

$$P_l^m(x) = \frac{(-1)^m}{2^l l!} (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}} (x^2-1)^l. \quad (4.93)$$

Note que esta fórmula también toma sentido para $m \leq 0$, con la condición de que: $l+m \geq 0 \Rightarrow m \geq -l$. Tenemos así una construcción de los polinomios asociados de Legendre para todos los enteros m en el intervalo

$$-l \leq m \leq l. \quad (4.94)$$

Note que la ecuación asociada de Legendre (4.85) es invariante bajo el cambio $m \rightarrow -m$, ya que solo m^2 aparece en la ecuación. Esto implica que si consideramos una solución P_l^m con m dado, entonces cambiando $m \rightarrow -m$ nos debe producir otra solución. Más aún, sólo una solución a l y m^2 fijos, es regular en $x = \pm 1$. Dado que $P_l^m(x)$ y $P_l^{-m}(x)$ dados por (4.93) son regulares (ambos) en $x = \pm 1$, se concluye que estos polinomios son linealmente dependientes

$$P_l^{-m}(x) = k P_l^m(x) \quad (4.95)$$

Es fácil determinar la constante k , utilizando la expresión (4.93) de los polinomios asociados de Legendre en la ecuación anterior

$$\begin{aligned} \frac{(-1)^{-m}}{2^l l!} (1-x^2)^{-\frac{m}{2}} \frac{d^{l-m}}{dx^{l-m}} (x^2-1)^l &= k \frac{(-1)^m}{2^l l!} (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}} (x^2-1)^l \\ \Rightarrow \frac{d^{l-m}}{dx^{l-m}} (x^2-1)^l &= k (-1)^{2m} (1-x^2)^m \frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}} (x^2-1)^l. \end{aligned} \quad (4.96)$$

Dado que sólo queremos calcular k , es suficiente concentrarnos en la potencia más alta en x . Desde luego podemos checar todas las potencias de x , pero no lo haremos aquí, esto se le deja al lector como ejercicio. Al orden dominante tenemos

$$\frac{d^{l-m}}{dx^{l-m}} x^{2l} = k (-1)^m x^{2m} \frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}} x^{2l},$$

y derivando explícitamente

$$\begin{aligned} 2l(2l-1) \cdots (2l-(l-m-1)) x^{2l-(l-m)} &= k (-1)^m x^{2m} 2l \cdots (2l-(l+m-1)) x^{2l-(l+m)} \\ \Rightarrow \frac{(2l)!}{(l+m)!} &= k (-1)^m \frac{(2l)!}{(l-m)!}. \end{aligned} \quad (4.97)$$

De donde obtenemos el valor de la constante

$$k = \frac{(l-m)!}{(l+m)!} (-1)^m. \quad (4.98)$$

Concluimos entonces que la relación entre los polinomios asociados de Legendre con valor de m que difiere por un signo es

$$P_l^{-m}(x) = (-1)^m \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_l^m(x). \quad (4.99)$$

¿Qué podemos decir sobre la ortogonalidad de los polinomios? Utilizando el mismo método que utilizamos con los polinomios de Legendre, es fácil mostrar que

$$\int_{-1}^1 P_l^m(x) P_n^m(x) dx = C_{lm} \delta_{ln}, \quad (4.100)$$

donde δ_{ln} es la delta de Kronecker y C_{lm} es una constante que depende del valor de l y m . Note que en esta ecuación ambos polinomios tienen el mismo valor de m . Para calcular la constante C_{lm} evaluemos explícitamente la integral

$$C_{lm} = \int_{-1}^1 [P_l^m(x)]^2 dx = \int_{-1}^1 P_l^m(x) \frac{(l+m)!}{(l-m)!} (-1)^m P_l^{-m}(x) dx.$$

Note que en esta ecuación hemos escrito el polinomio $P_l^m(x)$ en términos de $P_l^{-m}(x)$ ¿Por qué? porque de esta manera el factor de $(1-x^2)^m$ se eliminará de la integral, facilitándonos así el cálculo⁵. Utilizando la fórmula de Rodrigues (4.93) para los polinomios asociados tenemos que

$$\begin{aligned} C_{lm} &= (-1)^m \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \int_{-1}^1 \frac{(-1)^m (l-x^2)^{\frac{m}{2}}}{2^l l!} \frac{d^{l+m}(x^2-1)^l}{dx^{l+m}} \cdot \frac{(-1)^m (l-x^2)^{-\frac{m}{2}}}{2^l l!} \frac{d^{l-m}(x^2-1)^l}{dx^{l-m}} dx \\ &= \frac{(-1)^m (l+m)!}{2^{2l} (l!)^2 (l-m)!} \int_{-1}^1 \frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}} (x^2-1)^l \frac{d^{l-m}}{dx^{l-m}} (x^2-1)^l dx. \end{aligned}$$

Integrando por partes tenemos

$$C_{lm} = \frac{(-1)^m (l+m)!}{2^{2l} (l!)^2 (l-m)!} \left\{ \frac{d^{l+m-1}(x^2-1)^l}{dx^{l+m-1}} \underbrace{\frac{d^{l-m}(x^2-1)^l}{dx^{l-m}}}_{=0, \text{ al evaluarla}} \Big|_{-1}^1 - \int_{-1}^1 \frac{d^{l+m-1}(x^2-1)^l}{dx^{l+m-1}} \frac{d^{l-m+1}(x^2-1)^l}{dx^{l-m+1}} dx \right\}.$$

E integrando por partes $(l+m)$ -veces

$$C_{lm} = \frac{(-1)^m (l+m)!}{2^{2l} (l!)^2 (l-m)!} (-1)^{l+m} \int_{-1}^1 (x^2-1)^l \underbrace{\frac{d^{2l}(x^2-1)^l}{dx^{2l}}}_{=(2l)!} dx. \quad (4.101)$$

⁵Esto sucede porque según la ecuación (4.93), $P_l^m(x) \sim (l-x^2)^{\frac{m}{2}}$, mientras que $P_l^{-m}(x) \sim (l-x^2)^{-\frac{m}{2}}$.

Con lo cual

$$C_{lm} = \frac{(2l)!(l+m)!}{2^{2l}(l!)(l-m)!} \int_{-1}^1 (1-x^2)^l dx. \quad (4.102)$$

Pero esta integral fué la misma integral que calculamos para obtener la constante de normalización de los polinomios de Legendre, donde obtuvimos

$$C_n = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \int_{-1}^1 (1-x^2)^n dx = \frac{2}{2n+1}. \quad (4.103)$$

Utilizando este resultado obtenemos finalmente para la constante C_{lm}

$$C_{lm} = \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \frac{2}{2l+1}. \quad (4.104)$$

Por lo tanto la relación de ortogonalidad de los polinomios asociados de Legendre queda finalmente como

$$\int_{-1}^1 P_l^m(x) P_n^m(x) dx = \frac{2}{2l+1} \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \delta_{ln}. \quad (4.105)$$

4.6. Clase 17

4.6.1. Los armónicos esféricos y la ecuación de Laplace

Poniendo en perspectiva las clases pasadas, lo que hemos hecho hasta ahora en este capítulo es resolver la ecuación asociada de Legendre (4.85) y su caso particular, la ecuación de Legendre (4.1). Estas soluciones nos permiten introducir un nuevo conjunto de funciones que es muy importante en la física, los armónicos esféricos.

En el capítulo anterior discutimos que al aplicar una sola vez el método de separación de variables a la ecuación de Helmholtz en coordenadas esféricas, podíamos separar la ecuación en una ecuación diferencial ordinaria para la función radial $R(r)$ y una ecuación diferencial parcial (ec. (3.117)) para la parte angular, cuyas funciones propias son los armónicos esféricos $Y(\theta, \phi)$

$$\nabla_{(\theta, \phi)}^2 Y(\theta, \phi) = -l(l+1)Y(\theta, \phi). \quad (4.106)$$

Empleando una vez más el método de separación de variables, pudimos separar la ecuación diferencial parcial (4.106) en dos ecuaciones diferenciales ordinarias, siendo estas la ecuación de Helmholtz en una dimensión (3.121) y la ecuación asociada de Legendre (3.122). ¡Pero ahora ya conocemos las soluciones de estas ecuaciones! Juntando todos los ingredientes, definimos los armónicos esféricos: $Y_{lm}(\theta, \phi) = P_l^m(\cos\theta)\Phi_m(\phi)$ como

$$Y_{lm}(\theta, \phi) \equiv \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \sqrt{\frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos\theta) e^{im\phi}, \quad l \geq 0, \quad -l \leq m \leq l. \quad (4.107)$$

donde ellos satisfacen la ecuación de Laplace (4.106).

Tenemos así que los armónicos esféricos forman un conjunto completo de soluciones regulares de la ecuación de Laplace sobre la esfera unitaria. Los armónicos esféricos tienen la propiedad

$$Y_{l,-m}(\theta, \phi) = (-1)^m Y_{l,m}^*(\theta, \phi), \quad (4.108)$$

la cual puede mostrarse fácilmente

$$\begin{aligned} Y_{l,-m}(\theta, \phi) &= \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \sqrt{\frac{(l+m)!}{(l-m)!}} P_l^{-m}(\cos \theta) e^{-im\phi} \\ &= \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \sqrt{\frac{(l+m)!}{(l-m)!}} (-1)^m \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_l^m(\cos \theta) e^{-im\phi} \\ &= (-1)^m \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \sqrt{\frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos \theta) (e^{im\phi})^* = (-1)^m Y_{l,m}^*(\theta, \phi). \end{aligned}$$

Los armónicos esféricos satisfacen la propiedad de ortogonalidad

$$\int Y_{l',m'}^*(\theta, \phi) Y_{lm}(\theta, \phi) d\Omega = \delta_{l'l} \delta_{m'm}, \quad (4.109)$$

donde $d\Omega \equiv \sin \theta d\theta d\phi$, es el elemento de área sobre la esfera unitaria y la $\delta_{mm'}$ viene del hecho de que las funciones $e^{im\phi}$ son ortogonales. Recuerde que

$$\int d\Omega \equiv \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \sin \theta d\theta = 4\pi. \quad (4.110)$$

Es ilustrativo escribir explícitamente los primeros armónicos esféricos. Recuerde que la relación entre l y m es $-l \leq m \leq l$. Para $l = 0$ la única posibilidad es que $m = 0$ y el armónico esférico respectivo es una constante

$$Y_{0,0}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{1}{4\pi}}. \quad (4.111)$$

Para $l = 1$ existen tres posibles valores de m , $m = -1, 0$, y 1 , y los armónicos esféricos respectivos son

$$Y_{1,-1}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{-i\phi}, \quad Y_{1,0}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta, \quad Y_{1,1}(\theta, \phi) = -Y_{1,-1}^*(\theta, \phi). \quad (4.112)$$

Para $l = 3$, m puede tomar 5 valores diferentes: $m = -2, -1, 0, 1, 2$ y los armónicos esféricos son

$$Y_{2,-2} = \sqrt{\frac{15}{32\pi}} \sin^2 \theta e^{-2i\phi}, \quad Y_{2,-1} = \sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin \theta \cos \theta e^{-i\phi}, \quad Y_{2,0} = \sqrt{\frac{5}{16\pi}} (3 \cos^2 \theta - 1), \quad (4.113)$$

mientras que los restantes dos armónicos esféricos se calculan de $Y_{2,1} = -Y_{2,-1}^*$ y $Y_{2,2} = Y_{2,-2}^*$.

Para dar una interpretación geométrica de los armónicos esféricos, es ilustrativo reescribirlos en términos de coordenadas cartesianas. La transformación de coordenadas esféricas a cartesianas es

$$x = r \sin \theta \cos \phi, \quad y = r \sin \theta \sin \phi, \quad z = r \cos \theta. \quad (4.114)$$

Note que las combinaciones $x + iy$ y $(x + iy)^*$ en términos de las coordenadas esféricas son

$$x + iy = r \sin \theta (\cos \phi + i \sin \phi) = r \sin \theta e^{i\phi} \quad y \quad x - iy = r \sin \theta e^{-i\phi}. \quad (4.115)$$

Como $Y_{0,0}$ es una constante, éste armónico no cambia su expresión al cambiar coordenadas. Por inspección de (4.112), vemos que los armónicos esféricos con $l = 1$, están dados en términos de las combinaciones (4.115) y del cociente z/r ante el cambio de coordenadas. Explícitamente

$$Y_{1,-1}(x, y, z) = \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \frac{x - iy}{r}, \quad Y_{1,0}(x, y, z) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \frac{z}{r}, \quad Y_{1,1} = -Y_{1,-1}^*. \quad (4.116)$$

En el caso de los armónicos con $l = 2$, éstos se reescriben en la forma

$$\begin{aligned} Y_{2,-2}(x, y, z) &= \sqrt{\frac{15}{32\pi}} \frac{(x - iy)^2}{r^2}, & Y_{2,-1}(x, y, z) &= \sqrt{\frac{15}{8\pi}} \frac{z(x - iy)}{r^2}, \\ Y_{2,0}(x, y, z) &= \sqrt{\frac{5}{16\pi}} \left(\frac{3z^2}{r^2} - 1 \right) = \sqrt{\frac{3}{16\pi}} \frac{2z^2 - x^2 - y^2}{r^2}, \end{aligned} \quad (4.117)$$

y para los restantes dos armónicos se tiene $Y_{2,1} = -Y_{2,-1}^*$ y $Y_{2,2} = Y_{2,-2}^*$.

Comenzamos a notar así que para cada valor de l , los armónicos esféricos en coordenadas cartesianas forman un conjunto de funciones, etiquetadas por m con $-l \leq m \leq l$, y todas tienen la forma de un polinomios de grado l en (x, y, z) , divididas por r^l

$$Y_{lm}(x, y, z) \sim \frac{x_{i1}x_{i2}\dots x_{il}}{r^l}. \quad (4.118)$$

En esta expresión x_{ij} puede ser $x, y, o z$, según sea el armónico de que se trate. Note que mientras más grande es l , más grande es el número de polinomios posibles. Por ejemplo para $l = 1$, tenemos en total 3 funciones $Y_{1,m}$, las cuales se pueden reorganizar tomando combinaciones apropiadas de $\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, y \frac{z}{r}$

$$\begin{aligned} Y_{1,0} &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \frac{z}{r} \Rightarrow \frac{z}{r} \sim Y_{1,0} \\ Y_{1,-1} - Y_{1,1} &= \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \left(\frac{x - iy}{r} + \frac{x + iy}{r} \right) = \sqrt{\frac{3}{2\pi}} \frac{x}{r}, \Rightarrow \frac{x}{r} \sim Y_{1,-1} - Y_{1,1} \\ Y_{1,-1} + Y_{1,1} &= \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \left(\frac{x - iy}{r} - \frac{x + iy}{r} \right) = -i \sqrt{\frac{3}{2\pi}} \frac{y}{r}, \Rightarrow \frac{y}{r} \sim Y_{1,-1} + Y_{1,1} \end{aligned}$$

Así una vez que conocemos uno de ellos, por ejemplo $Y_{1,0}$, los otros dos se obtienen rotando el sistema de coordenadas 90 grados alrededor del eje x y el eje y . Algo similar sucede para los armónicos de orden superior. Concluimos entonces que:

¡los Armónicos esféricos saben de la simetría rotacional de la esfera!

En el lenguaje de teoría de grupos uno dice que:

Los armónicos esféricos **caen en las representaciones del**
 $Y_{lm}(\theta, \phi)$ \sim **grupo de rotaciones.**

El hecho de que las soluciones a la ecuación asociada de Legendre (4.85) se puedan construir a partir de las soluciones a la ecuación de Legendre (4.1), encuentra su explicación en el hecho de que los armónicos Y_{lm} con $m \neq 0$, están relacionados a los armónicos $Y_{l,0}$ (con $m = 0$) mediante rotaciones de simetría de la esfera.

4.7. Problemas

1. Muestre cada una de las integrales siguientes

$$\int_{-1}^1 x P_l(x) P_{l-1}(x) dx = \frac{2l}{4l^2 - 1}, \quad l \geq 1,$$

$$\int_{-1}^1 P_l(x) P'_{l+1}(x) dx = 2, \quad l \geq 0,$$

$$\int_{-1}^1 x P'_l(x) P_l(x) dx = \frac{2l}{2l + 1}, \quad l \geq 0,$$

donde $P' \equiv \frac{dP}{dx}$.

2. Encuentre el desarrollo en serie de Legendre de la función $|x|$ en el intervalo $x \in [-1, 1]$.

3. Encuentre el desarrollo en serie de Legendre de cada una de las funciones siguientes en el intervalo $x \in [-1, 1]$: a) x^3 , b) $x^5 - x^3 + 2$, c) $4x^4 + 2x^2 - x$.

4. Considere una carga eléctrica q colocada sobre el eje z en la posición $z = a$. Usted aprendió en su curso de campos que el potencial eléctrico debido a la carga, en el punto (r, θ, ϕ) está dado por

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{|\vec{r} - a\hat{k}|} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{r^2 + a^2 - 2ar \cos \theta}}.$$

a) Considere el caso $r^2 > |a^2 - 2ar \cos \theta|$. Desarrollando el numerador muestre que

$$\Phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos \theta) \left(\frac{a}{r}\right)^n,$$

donde $g(t, x) = (1 - 2xt + t^2)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n$ es la función generadora de los polinomios de Legendre.

b) Desde luego, para un estudiante serio como usted no basta con decir que los coeficientes de t^n son los Polinomios de Legendre, usted querrá dar una prueba de ello. Bien, no iremos contra su deseo. Muestre que en realidad $g(t, x)$ genera los polinomios de Legendre.

Ayuda: ¿Conoce usted alguna otra función generadora de los Polinomios de Legendre?

5. Utilice la función generadora de los Polinomios de Legendre

$$g(t, x) = \frac{1}{\sqrt{1 - 2xt + t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n,$$

para mostrar las siguientes propiedades.

a) $P_n(1) = 1$.

b) Relación de ortogonalidad $\int_{-1}^1 P_n(x)P_m(x)dx = \frac{2}{2n+1}\delta_{nm}$.

c) Evalúe $\int_0^1 P_n(x)dx$.

d) La relación de recurrencia

$$(2n + 1)xP_n = (n + 1)P_{n+1} + nP_{n-1}.$$

e)

$$(2n + 1)P_n = \frac{dP_{n+1}}{dx} - \frac{dP_{n-1}}{dx}.$$

6. Calcule el potencial electrostático de las siguientes configuraciones de carga:

a) Dos cargas puntuales (dipolo eléctrico), una de ellas de carga $+q$, colocada en $z = a$ y la segunda de carga $-q$, colocada en $z = -a$.

b) Cuadrupolo lineal de tres cargas puntuales, la primera de carga $+q$ colocada en $z = -a$, la segunda de carga $-2q$ colocada en el origen y la tercera de carga $+q$ colocada en $z = a$.

c) Octupolo eléctrico lineal de 4 cargas, la primera de carga $-q$ colocada en $z = -2a$, la segunda de carga $+2q$ colocada en $z = -a$, la tercera de carga $-2q$ colocada en $z = a$ y la cuarta de carga q colocada en $z = 2a$.

7. Muestre que

$$P_n(\cos \theta) = (-1)^n \frac{r^{n+1}}{n!} \frac{\partial^n}{\partial z^n} \left(\frac{1}{r} \right).$$

8. Los polinomios de Chebyshev (tipo II) son generados por

$$\frac{1}{1 - 2x + t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} U_n(x)t^n.$$

Muestre que una representación en serie de estos polinomios está dada por

$$U_n(x) = \sum_{k=0}^{[n/2]} (-1)^k \frac{(n-k)!}{k!(n-2k)!} (2x)^{n-2k}.$$

9. Operando en coordenadas esféricas, muestre que

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{P_n(\cos \theta)}{r^{n+1}} \right] = -(n+1) \frac{P_{n+1}(\cos \theta)}{r^{n+2}}.$$

Este es el paso clave en el argumento matemático del resultado que nos dice que la derivada de un multipolo lleva al siguiente multipolo de orden superior.

10. Desarrolle la función delta de Dirac en una serie de polinomios de Legendre, utilizando el intervalo $-1 \leq x \leq 1$.

11. Verifique los desarrollos siguientes de la delta de Dirac

$$\delta(1-x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{2} P_n(x), \quad \text{y} \quad \delta(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+1}{2} P_n(x).$$

Estas expresiones aparecen cuando las ondas planas de Rayleigh se desarrollan en ondas esféricas entrantes y salientes.

Nota: Suponga que la función delta de Dirac se considera completamente cuando se integra sobre el intervalo $[-1, 1]$.

12. Una función $f(x)$ se desarrolla en una serie de Legendre $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x)$. Muestre que

$$\int_{-1}^1 [f(x)]^2 dx = \sum_{n=0}^{\infty} 2 \frac{a_n^2}{2n+1}.$$

Esta es la forma de Legendre de la identidad de Parseval para las series de Fourier.

13. Muestre que

$$\int_{-1}^1 x(1-x^2) P'_n P'_m dx = 0, \quad \text{a menos que } m = n \pm 1.$$

14. La amplitud de una onda dispersada está dada por

$$f(\theta) = \frac{\lambda}{2\pi} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) e^{i\delta_l} \sin \delta_l P_l(\cos \theta),$$

donde θ es el ángulo de dispersión, l el momento angular, y δ_l el corrimiento de fase producido por el potencial central que provoca la dispersión. La sección total de dispersión es $\sigma_{tot} = \int f^*(\theta) f(\theta) d\Omega$. Muestre que

$$\sigma_{tot} = \frac{\lambda^2}{\pi} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \sin^2 \delta_l.$$

15. Determine el potencial electrostático (desarrollo de Legendre) de un aro circular de carga eléctrica para $r < a$.

16. Dos esferas concéntricas tienen radio a y b ($b > a$) y cada una de ellas está dividida en dos hemisferios por el mismo plano horizontal. El hemisferio superior de la esfera interna y el hemisferio inferior de la esfera exterior se mantienen a un potencial constante V . Los otros hemisferios están a potencial cero. Determine el potencial en la región $a \leq r \leq b$ como una serie en polinomios de Legendre. Incluya términos al menos hasta el orden $l = 4$. Verifique su resultado comparándolo con los resultados conocidos en los casos límites $b \rightarrow \infty$ y $a \rightarrow 0$.

17. Calcule el vector potencial magnético \vec{A} y el campo de inducción magnética \vec{B} que origina una espira circular de alambre por el que fluye una corriente estacionaria I . La espira está colocada en el plano ecuatorial $\theta = \pi/2$.

18. Muestre que

$$P_n^n(\cos \theta) = (2n - 1)!! \sin^n(\theta), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

19. Deduzca la relación de recurrencia siguiente para los polinomios asociados de Legendre

$$P_n^{m+1}(x) - \frac{2mx}{(1-x^2)^{1/2}} P_n^m(x) + [n(n+1) - m(m-1)] P_n^{m-1}(x) = 0.$$

20. Muestre que

$$\sin \theta P_n'(\cos \theta) = P_n^1(\cos \theta).$$

21. Como una repetición del problema 13, muestre utilizando las funciones asociadas de Legendre, que

$$\int_{-1}^1 x(1-x^2) P_n' P_m' dx = \frac{n+1}{2n+1} \cdot \frac{2}{2n-1} \cdot \frac{n!}{(n-2)!} \delta_{m,n-1} + \frac{n}{2n+1} \cdot \frac{2}{2n+3} \cdot \frac{(n+2)!}{n!} \delta_{m,n+1}.$$

22. Una generalización del problema 4, es colocar la partícula puntual ya no sobre el eje z , sino en un punto arbitrario \vec{r}' del espacio. Para poder escribir el potencial en términos de los armónicos esféricos usted debe mostrar que

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \begin{cases} \sum_{l \geq 0} \sum_{m=-l}^l \frac{4\pi}{2l+1} \frac{r'^l}{r^{l+1}} Y_{lm}^*(\theta', \phi') Y_{lm}(\theta, \phi) & \text{para } r > r', \\ \sum_{l \geq 0} \sum_{m=-l}^l \frac{4\pi}{2l+1} \frac{r^l}{r'^{l+1}} Y_{lm}^*(\theta', \phi') Y_{lm}(\theta, \phi) & \text{para } r' > r, \end{cases}$$

donde (r, θ, ϕ) describe al punto \vec{r} en coordenadas polares esféricas, y de manera similar (r', θ', ϕ') al punto \vec{r}' . Desde luego $r = |\vec{r}|$ y $r' = |\vec{r}'|$.

23. Muestre que

$$Y_l^m(0\varphi) = \left(\frac{2l+1}{4\pi} \right)^{1/2} \delta_{m0}.$$

24. a) Exprese los elementos del tensor de momento cuadrupolar $x_i x_j$ como una combinación lineal de los armónicos esféricos T_2^m (y Y_0^0).

Nota. El tensor $x_i x_j$ es *reducible*. La aparición de Y_0^0 indica la presencia de una componente escalar.

b) El tensor de momento cuadrupolar está definido como

$$Q_{ij} = \int (3x_i x_j - r^2 \delta_{ij}) \rho(\mathbf{r}) d\tau,$$

con $\rho(\mathbf{r})$ la densidad de carga. Exprese las componentes de $(3x_i x_j - r^2 \delta_{ij})$ en términos de $r^2 Y_2^m$.

c) ¿Cuál es el significado del término $-r^2 \delta_{ij}$?

5

Funciones de Bessel

En el capítulo anterior hemos estudiado con gran detalle las soluciones a la ecuación asociada de Legendre alrededor de un punto ordinario. En este capítulo estudiaremos las soluciones a la ecuación de Bessel. Utilizaremos nuevamente el método de Frobenius para encontrar las soluciones, pero con la diferencia que la serie se desarrolla ahora alrededor de un punto singular regular.

5.1. Clase 18

Nuestro objetivo es resolver la ecuación de Bessel

$$x^2 \frac{d^2 y(x)}{dx^2} + x \frac{dy(x)}{dx} + (x^2 - \nu^2)y(x) = 0, \quad \text{donde } \nu = \text{cte.} \quad (5.1)$$

Como analizamos en la clase 10, esta ecuación tiene un punto singular regular en $x = 0$, y un punto singular irregular en $x = \infty$.

Para encontrar la solución de la ecuación realizaremos un desarrollo en serie en torno del punto $x = 0$. Dado que éste es un punto singular regular, de acuerdo con el teorema de Frobenius y Fuchs 3.4.6, nos fijaremos en una solución de la forma

$$y(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^{n+\sigma}. \quad (5.2)$$

Sustituyendo esta solución en la ecuación de Bessel (5.1), tendremos considerando que las

derivadas son

$$\begin{aligned}\frac{dy(x)}{dx} &= \sum_{n \geq 0} a_n(n + \sigma)x^{n+\sigma-1}, \\ \frac{d^2y(x)}{dx^2} &= \sum_{n \geq 0} a_n(n + \sigma)(n + \sigma - 1)x^{n+\sigma-2},\end{aligned}$$

que

$$\begin{aligned}& \sum_{n \geq 0} (a_n(n + \sigma)(n + \sigma - 1)x^{n+\sigma} + a_n(n + \sigma)x^{n+\sigma} + a_nx^{n+\sigma+2} - \nu^2a_nx^{n+\sigma}) = 0 \\ \Rightarrow & \sum_{n \geq 0} [(n + \sigma)^2 - \nu^2] a_nx^{n+\sigma} + \sum_{n \geq 0} a_nx^{n+\sigma+2} = 0.\end{aligned}\quad (5.3)$$

Con el objetivo de tener la misma potencia de x en ambos términos, cambiamos de índice $n \rightarrow n + 2$, en el primer término

$$\sum_{n \geq 0} [(n + \sigma)^2 - \nu^2] a_nx^{n+\sigma} \rightarrow \sum_{n \geq -2} [(n + \sigma + 2)^2 - \nu^2] a_{n+2}x^{n+\sigma+2},$$

y escribiendo explícitamente los términos correspondientes a $n = -2$ y $n = -1$, tenemos

$$(\sigma^2 - \nu^2)a_0x^\sigma + [(1 + \sigma)^2 - \nu^2] a_1x^{1+\sigma} + \sum_{n \geq 0} [(n + \sigma + 2)^2 - \nu^2] a_{n+2}x^{n+\sigma+2}.$$

Introduciendo esta expresión en la ecuación (5.3) obtenemos

$$(\sigma^2 - \nu^2)a_0x^\sigma + [(1 + \sigma)^2 - \nu^2] a_1x^{1+\sigma} + \sum_{n \geq 0} ([(n + \sigma + 2)^2 - \nu^2] a_{n+2} + a_n) x^{n+\sigma+2} = 0.$$

Así la condición de que la serie se anule para toda x , implica que los coeficientes deben anularse. Esto nos produce tres ecuaciones

$$(\sigma^2 - \nu^2)a_0 = 0, \quad (5.4)$$

$$[(1 + \sigma)^2 - \nu^2] a_1 = 0, \quad (5.5)$$

$$[(n + \sigma + 2)^2 - \nu^2] a_{n+2} + a_n = 0 \quad \Rightarrow \quad a_{n+2} = \frac{a_n}{\nu^2 - (n + \sigma + 2)^2}. \quad (5.6)$$

Analicemos primeramente la condición (5.4). Esta es la ecuación indicial asociada a la ecuación de Bessel. Note que podemos suponer sin pérdida de generalidad que $a_0 \neq 0^1$,

¹¿Qué pasaría si $a_0 = 0$? Lo que sucedería es que la serie (5.2) sería de la forma

$$y(x) = b_1x^{1+\sigma} + b_2x^{2+\sigma} + b_3x^{3+\sigma} + \dots,$$

pero dado que a este punto, σ es una constante completamente arbitraria, no determinada aún, podemos reescribirla como $\sigma \rightarrow \sigma - 1$, y la serie de potencias sería de la forma

$$y(x) = b_1x + b_2x^{1+\sigma} + b_3x^{2+\sigma} + b_4x^{3+\sigma} + \dots,$$

pero esta es la forma de la serie si tuviéramos $a_0 \neq 0$ con $a_0 = b_1$, $a_1 = b_2$, etc. Así pedir que $a_0 \neq 0$ no resta generalidad.

con lo cual la solución a la ecuación es

$$\sigma^2 - \nu^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \sigma^2 = \nu^2 \quad \Rightarrow \quad \sigma = \pm\nu. \quad (5.7)$$

Resolvamos ahora la condición (5.5), sustituyendo en ella la solución (5.7)

$$[(1 + \sigma)^2 - \nu^2] a_1 = (1 + 2\sigma)a_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} a_1 = 0 & \text{ó} \\ \sigma = -\frac{1}{2}. \end{cases} \quad (5.8)$$

Pero hemos obtenido de la ecuación indicial (5.7) que $\sigma = \pm\nu$, de lo cual se siguen los casos especiales $\sigma = \pm\frac{1}{2}$. Como para este caso $\sigma_1 - \sigma_2 = \frac{1}{2} - (-\frac{1}{2}) = 1$, y de acuerdo con el Teorema de Frobenius-Fuch 3.4.6, los casos donde $s_1 - s_2 \in \mathbb{Z}$, no producen de manera directa las dos soluciones linealmente independientes, este caso lo analizaremos por separado. Supondremos entonces que ν toma un valor genérico el cual no es un número entero o semientero².

Sustituyendo $\sigma = \pm\nu$ en la ecuación (5.6) obtenemos la relación de recurrencia

$$a_{n+2} = \frac{a_n}{\nu^2 - (n \pm \nu + 2)^2}. \quad (5.9)$$

Esta relación de recurrencia nos da expresiones para todos los coeficientes a_n con $n \geq 2$ en términos de a_0 (el cual es diferente de cero) y a_1 (el cual es cero dado que estamos suponiendo $\nu \neq \pm\frac{1}{2}$). Dado que $a_1 = 0$, la serie es de la forma ($a_1 = 0 \Rightarrow a_3 = a_5 = a_7 = \dots = 0$)

$$y(x) = a_0 x^\sigma + a_2 x^{2+\sigma} + \dots + a_n x^{n+\sigma} + a_{n+2} x^{n+2+\sigma} + \dots \quad (5.10)$$

¿Converge la serie? Utilicemos el criterio del cociente 1.1.7 para calcular el radio de convergencia de la serie

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+2} x^{n+2+\sigma}}{a_n x^{n+\sigma}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^2}{\nu^2 - (n \pm \nu + 2)^2} = - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^2}{n^2} \rightarrow 0, \quad (5.11)$$

si x toma un valor fijo, sin importar que tan grande sea. Concluimos entonces que

¡el radio de convergencia es infinito!

Note que este resultado está perfectamente de acuerdo con el hecho de que el siguiente punto singular de la ecuación de Bessel está en $x = \infty$. Así deberíamos esperar que la serie converja para cualquier x finita.

Es fácil ver que si ν toma un valor genérico (no entero y no semi-entero), nuestras dos soluciones correspondientes a las 2 raíces de la ecuación indicial $\sigma^2 - \nu^2 = 0$, esto es, $\sigma = +\nu$ y $\sigma = -\nu$, producen soluciones linealmente independientes. Esto es claro, dado que las soluciones toman la forma

$$y_1 = x^\nu \sum_{n \geq 0} a_n x^n, \quad y_2 = x^{-\nu} \sum_{n \geq 0} b_n x^n, \quad (5.12)$$

²Estos caso los analizaremos después, ya que como $\sigma = \pm\nu$, entonces en los casos en que ν es un número entero o semientero, la diferencia de raíces $\sigma_1 - \sigma_2 = 2\nu$ es un número entero.

y los prefactores x^ν y $x^{-\nu}$ en frente de los desarrollos de Taylor (analíticos) son potencias fraccionales de x diferentes, y por tanto no hay una relación lineal entre las soluciones.

Por ejemplo, si $\nu = \frac{1}{3}$ entonces y_1 es

$$y_1 = a_0x^{\frac{1}{3}} + a_2x^{\frac{7}{3}} + a_4x^{\frac{13}{3}} + \cdots \quad y \quad y_2 = b_0x^{-\frac{1}{3}} + b_2x^{\frac{5}{3}} + b_4x^{\frac{11}{3}} + \cdots \quad (5.13)$$

Este mismo argumento muestra que las soluciones no son linealmente independientes si ν es un número entero o simientero. Mostremos esta afirmación con un ejemplo específico. Consideremos el caso $\nu = 1$ y comencemos con la solución y_2 , esto es, con el caso $\sigma = -1$

$$y_2(x) = x^{-1} \sum_{n \geq 0} b_n x^n, \quad (5.14)$$

donde los coeficientes b_n satisfacen la relación de recurrencia (5.9) para $\sigma = -1$

$$b_{n+2} = \frac{b_n}{1 - (n+1)^2} = \frac{b_n}{1 - (n^2 + 2n + 1)} = -\frac{b_n}{n(n+2)}. \quad (5.15)$$

Una primer consecuencia que obtenemos de esta relación de recurrencia es que no podemos obtener el coeficiente b_2 en términos del coeficiente b_0 , ya que $b_{n+2} = -\frac{b_n}{n(n+2)}$ diverge en $n = 0$. Concluimos entonces que $b_0 = 0$. Dado que tenemos también que para esta solución $b_1 = 0$, entonces concluimos que la serie comienza con el coeficiente b_2

$$y_2(x) = b_2x + b_4x^3 + b_6x^5 + b_8x^7 + \cdots = \sum_{n \geq 2} b_n x^{n-1}. \quad (5.16)$$

Si ahora reetiquetamos nuestros coeficientes $b_n \rightarrow c_{n-2}$, la solución se reescribe como

$$y_2(x) = c_0x + c_2x^3 + c_4x^5 + c_6x^7 + \cdots = \sum_{n \geq 0} c_n x^{n+1}. \quad (5.17)$$

Note que el cambio de coeficientes $b_n \rightarrow c_{n-2}$ realizado, implica que si

$$b_2 \neq 0 \quad \text{y} \quad b_3 = 0 \quad \text{entonces} \quad c_0 \neq 0 \quad \text{y} \quad c_1 = 0.$$

Una manera alternativa y más compacta de escribir este resultado es la siguiente

$$\sum_{n \geq 2} b_n x^{n-1} = \sum_{n \geq 2} c_{n-2} x^{n-1} = \sum_{m \geq 0} c_m x^{m+1},$$

donde en la última igualdad hemos realizado el cambio $n \rightarrow m + 2$. Los coeficientes c_n en (5.17) satisfacen la relación de recurrencia

$$b_{n+2} = -\frac{b_n}{n(n+2)} \Rightarrow c_n = -\frac{c_{n-2}}{n(n+2)} \Rightarrow c_{n+2} = -\frac{c_n}{(n+2)(n+4)}. \quad (5.18)$$

Comparemos esta solución ahora con la solución $y_1(x)$. Recordando que estamos considerando el caso $\nu = 1$, tenemos que

$$y_1(x) = x \sum_{n \geq 0} a_n x^n = \sum_{n \geq 0} a_n x^{n+1}, \quad (5.19)$$

y los coeficientes a_n satisfacen la relación de recurrencia (5.9) para $\sigma = 1$

$$a_{n+2} = \frac{a_n}{1 - (n+1+2)^2} = \frac{a_n}{1 - (n^2 + 6n + 9)} = -\frac{a_n}{n^2 + 6n + 8} = -\frac{a_n}{(n+2)(n+4)}, \quad (5.20)$$

con $a_0 \neq 0$ y $a_1 = 0$. Comparando las soluciones $y_2(x)$ dada por la ecuación (5.17) y $y_1(x)$ dada por (5.19) concluimos que los coeficientes no nulos son los mismos y satisfacen la misma relación de recurrencia, ya que la relación (5.18) es igual a la relación (5.20). Por lo tanto

$$y_1(x) = y_2(x) \quad \text{¡sólo una solución!} \quad (5.21)$$

Una discusión similar a la realizada para este caso particular donde $\sigma = \pm 1$, muestra que las dos soluciones $y_1(x)$ y $y_2(x)$ son iguales siempre que ν sea un entero o semi-entero, o equivalentemente, siempre que la diferencia de las dos raíces de la ecuación indicial cumpla que $\sigma_1 - \sigma_2 \in \mathbb{Z}$.

5.1.1. Funciones de Bessel de primera clase

Hemos obtenido que en el caso $\nu_1 - \nu_2 \neq$ entero tenemos dos soluciones linealmente independientes

$$y_1 = x^\nu \sum a_n x^n, \quad y \quad y_2 = x^{-\nu} \sum \tilde{a}_n x^n, \quad (5.22)$$

con $a_1 = a_3 = \dots a_{2n+1} \dots = 0$ y donde los coeficientes satisfacen la relación de recurrencia

$$a_{n+2} = \frac{a_n}{\nu^2 - (n + \sigma + 2)^2} \quad \text{con} \quad \sigma = \pm \nu \quad y \quad a_0 \neq 0. \quad (5.23)$$

En el caso en que $\sigma = \nu$, la relación de recurrencia se puede reescribir como

$$a_{n+2} = \frac{a_n}{\nu^2 - [(n+2)^2 + 2(n+2)\nu + \nu^2]} = -\frac{a_n}{(n+2)(n+2+2\nu)}. \quad (5.24)$$

Al igual que sucedió con los polinomios de Legendre, esta relación de recurrencia nos permite expresar todos los coeficientes pares en términos del único coeficiente indeterminado a_0

$$\begin{aligned} a_2 &= -\frac{a_0}{2(2\nu+2)} \\ a_4 &= -\frac{a_2}{4(2\nu+4)} = \frac{a_0}{2 \cdot 4 \cdot (2\nu+2)(2\nu+4)} \\ &\vdots = \vdots, \end{aligned}$$

y en general para el coeficiente a_{2k} con $k \in \mathbb{N}$ tenemos

$$\begin{aligned} a_{2k} &= (-1)^k \frac{a_0}{2 \cdot 4 \cdots (2k)(2\nu + 2)(2\nu + 4) \cdots (2\nu + (2k))} \\ &= (-1)^k \frac{a_0}{2^k (1 \cdot 2 \cdots k) 2^k (\nu + 1)(\nu + 2) \cdots (\nu + k)} \\ &= (-1)^k \frac{a_0}{2^{2k} k! (\nu + 1)(\nu + 2) \cdots (\nu + k)}, \end{aligned}$$

con lo cual la solución es

$$\begin{aligned} y_1 &= x^\nu (a_0 + a_2 x^2 + a_4 x^4 + \cdots + a_{2k} x^{2k} + \cdots) \\ &= x^\nu \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k} x^{2k} = x^\nu \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{a_0}{2^{2k} k! (\nu + 1)(\nu + 2) \cdots (\nu + k)} x^{2k}, \end{aligned} \quad (5.25)$$

donde a_0 es una constante arbitraria. Por razones que quedarán claras en la expresión final de la solución, es conveniente tomar esta constante como

$$a_0 = \frac{1}{2^\nu \Gamma(\nu + 1)}, \quad (5.26)$$

con lo cual definimos la función de Bessel de primera clase de orden ν , J_ν como

$$y_1(x) \equiv J_\nu(x) = x^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^{2k+\nu} k! (\nu + 1)(\nu + 2) \cdots (\nu + k) \Gamma(\nu + 1)} x^{2k}. \quad (5.27)$$

Podemos simplificar la escritura de esta solución utilizando la propiedad 1.2.4, de la función gama

$$\underbrace{\Gamma(\nu + 1)(\nu + 1)(\nu + 2) \cdots (\nu + k)}_{\Gamma(\nu + k + 1)} = \Gamma(\nu + 2)(\nu + 2) \cdots (\nu + k) = \Gamma(\nu + k + 1), \quad (5.28)$$

con lo cual

$$J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k + 1)\Gamma(\nu + k + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(\nu + k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}. \quad (5.29)$$

En particular, cuando $\nu = 0$, se tiene

$$J_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}. \quad (5.30)$$

Mientras que para $\nu = 1$, se tiene

$$J_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(1 + k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+1}. \quad (5.31)$$

Funciones de Bessel de primera clase

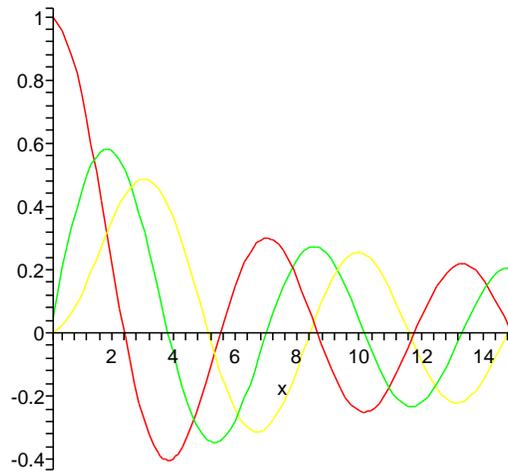


Figura 5.1: La figura muestra la gráfica de las funciones de Bessel de primera clase: $J_0(x)$ (roja), $J_1(x)$ (verde) y $J_2(x)$ (amarilla).

Funciones de Bessel de primera clase

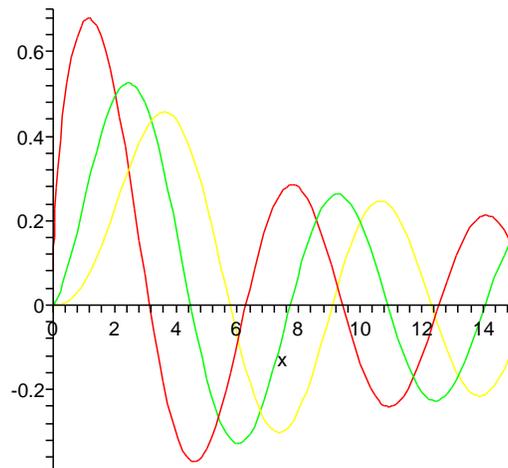


Figura 5.2: La figura muestra la gráfica de las funciones de Bessel de primera clase: $J_{1/2}(x)$ (roja), $J_{3/2}(x)$ (verde) y $J_{5/2}(x)$ (amarilla).

5.2. Clase 19

En la clase anterior hemos obtenido las funciones de Bessel de primera clase. En el caso en que ν no es un número entero ni semi-entero, las funciones de primera clase para ν y $-\nu$ son las dos soluciones linealmente independientes de la ecuación de Bessel. En el caso en que ν si es un número entero o semi-entero, la función de primera clase sólo me da una de las dos soluciones linealmente independientes. Para obtener la segunda solución tendremos que trabajar un poco más. en esta clase obtendremos esta segunda solución.

5.2.1. Funciones de Bessel de segunda clase

De la teoría general de soluciones en serie sabemos que si la diferencia entre las dos raíces de la ecuación indicial es un entero, entonces la segunda solución linealmente independiente de la ecuación diferencial es de la forma

$$y(x) = y_1(x) \log x + \sum_{n \geq 0} b_n x^{n-\nu}. \quad (5.32)$$

La estrategia para obtener esta segunda solución será sustituir esta serie en la ecuación de Bessel (5.1) y resolver para los nuevos coeficientes b_n . Es importante notar que en esta serie estamos considerando las dos raíces: $\sigma = \nu$ en $y_1(x)$ y $\sigma = -\nu$ en la serie del segundo término de $y(x)$. Dado que la primera y segunda derivada de $y(x)$ son

$$\begin{aligned} \frac{dy(x)}{dx} &= y_1' \log x + \frac{1}{x} y_1(x) + \sum_{n \geq 0} (n - \nu) b_n x^{n-\nu-1}, \\ \frac{d^2y(x)}{dx^2} &= y_1'' \log x + y_1' \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} y_1 + \frac{1}{x} y_1' + \sum_{n \geq 0} (n - \nu)(n - \nu - 1) b_n x^{n-\nu-2}, \end{aligned}$$

tenemos al sustituir estas expresiones en la ecuación de Bessel (5.1)

$$x^2 y''(x) + x y'(x) + (x^2 - \nu^2) y(x) = 0,$$

que

$$\begin{aligned} x^2 y_1'' \log x + y_1' x - y_1 + x y_1' + \sum_{n \geq 0} (n - \nu)(n - \nu - 1) b_n x^{n-\nu} + x y_1' \log x + y_1 \\ + \sum_{n \geq 0} (n - \nu) b_n x^{n-\nu} + (x^2 - \nu^2) y_1 \log x + \sum_{n \geq 0} b_n (x^2 - \nu^2) x^{n-\nu} = 0. \end{aligned}$$

Reagrupando términos obtenemos

$$\begin{aligned} \underbrace{(x^2 y_1'' + x y_1' + (x^2 - \nu^2) y_1)}_{=0} \log x + 2x y_1' \\ + \sum_{n \geq 0} [(n - \nu)(n - \nu - 1) + (n - \nu) + (x^2 - \nu^2)] x^{n-\nu} = 0. \end{aligned}$$

El primer término se anula porque $y_1(x)$ es solución de la ecuación de Bessel. Reescribiendo los coeficientes de la serie en el último término

$$\begin{aligned}(n - \nu)(n - \nu - 1) + (n - \nu) + (x^2 - \nu^2) &= (n - \nu)^2 + x^2 - \nu^2 = n^2 - 2n\nu + x^2 \\ &= n(n - 2\nu) + x^2,\end{aligned}$$

y considerando que

$$y_1(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^{n+\nu} \Rightarrow \frac{dy_1}{dx}(x) = \sum_{n \geq 0} (n + \nu) a_n x^{n+\nu-1}, \quad (5.33)$$

tenemos

$$2 \sum_{n \geq 0} (n + \nu) a_n x^{n+\nu} + \sum_{n \geq 0} n(n - 2\nu) b_n x^{n-\nu} + \sum_{n \geq 0} b_n x^{n-\nu+2} = 0. \quad (5.34)$$

Multiplicando por conveniencia la ecuación por x^ν , obtenemos

$$2 \sum_{n \geq 0} (n + \nu) a_n x^{n+2\nu} + \sum_{n \geq 0} n(n - 2\nu) b_n x^n + \sum_{n \geq 0} b_n x^{n+2} = 0. \quad (5.35)$$

Como siempre debemos agrupar los coeficientes de cada potencia de x , e igualar cada uno de tales coeficientes a cero. Note que esto tendrá sentido únicamente si 2ν es un entero!³

Si 2ν es un entero, entonces todos los términos de la primer suma se combinan con aquellos de la segunda y la tercera, dando origen a una ecuación que determina los coeficientes b_n .

En vez de desarrollar la solución general (5.35), adoptaremos una estrategia más sencilla. Ilustraremos primero lo que sucede en el caso $\nu = 1$, para el cual $\sigma_1 - \sigma_2 = 2 \in \mathbb{Z}$ y después daremos el resultado general sin demostrarlo. La ventaja de esta estrategia es que podemos entender la estructura de la solución general de una manera sencilla. En el caso $\nu = 1$ la ecuación (5.35) se convierte en

$$2 \sum_{n \geq 0} (n + 1) a_n x^{n+2} + \sum_{n \geq 0} n(n - 2) b_n x^n + \sum_{n \geq 0} b_n x^{n+2} = 0. \quad (5.36)$$

Reetiquetando el índice $n \rightarrow n + 2$ en la segunda suma

$$\sum_{n \geq 0} n(n - 2) b_n x^n \rightarrow \sum_{n=-2} (n + 2) n b_{n+2} x^{n+2} = -b_1 x + \sum_{n \geq 0} (n + 2) n b_{n+2} x^{n+2},$$

³ ¿Qué pasaría si 2ν no es un entero? Sucedería que en el primer término $(n + \nu) a_n = 0$, independientemente de los otros dos términos. Como 2ν no es entero, $(n + \nu) \neq 0$, lo cual implica que los coeficientes $a_n = 0$, para toda n . Concluiríamos entonces que $y_1(x) = 0$, pero hemos mostrado que $y_1(x)$ ¡es solución!

Lo que esto significa es que $y_2(x)$ no involucra al logaritmo si 2ν no es un entero, recuerde que $y_2(x) = y_1(x) \log x + \sum b_n$. De hecho cuando 2ν no es entero hemos obtenido ya 2 soluciones linealmente independientes y no esperamos una tercer solución que involucre al logaritmo.

obtenemos que la ecuación (5.36) se reescribe como

$$\sum_{n \geq 0} [2(n+1)a_n + n(n+2)b_{n+2} + b_n]x^{n+2} - b_1x = 0, \quad (5.37)$$

lo cual implica dos condiciones, $b_1 = 0$ y la relación de recurrencia

$$2(n+1)a_n + n(n+2)b_{n+2} + b_n = 0 \quad \Rightarrow \quad b_{n+2} = -\frac{b_n + 2(n+1)a_n}{n(n+2)} \quad n > 0. \quad (5.38)$$

En particular para $n = 0$ en (5.37) obtenemos que

$$2a_0 + b_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad b_0 = -2a_0, \quad (5.39)$$

de lo cual concluimos que b_2 no queda determinado por la relación (5.38).

El hecho de que b_2 no esté determinado no debería sorprendernos ¿Por qué? La razón es porque el papel que juega el coeficiente b_0 en la solución $y_2(x)$, es sólo introducir un múltiplo constante arbitrario de la solución $y_1(x)$. Mostremos esta afirmación. Sabemos que la solución $y_1(x)$ es de la forma

$$y_1(x) = x \sum_{n \geq 0} a_n x^n = a_0x + a_2x^3 + a_4x^5 + \dots = a_0 \left(x - \frac{1}{8}x^3 + \frac{1}{192}x^5 + \dots \right), \quad (5.40)$$

ya que según la relación de recurrencia (5.20), $a_2 = -\frac{a_0}{8}$, $a_4 = -\frac{a_2}{24} = \frac{a_0}{192}$, etcétera.

Mientras que los términos de la segunda propuesta de solución son de la forma

$$y_2(x) = y_1 \log x + \sum_{n \geq 0} b_n x^{n-1} = y_1 \log x + \frac{b_0}{x} + b_2x + b_3x^2 + b_4x^3 + b_5x^4 + \dots \quad (5.41)$$

pero las potencias impares de x en esta solución se pueden reescribir en la forma

$$b_2x + b_4x^3 + b_6x^5 + \dots = \sum_{n \geq 2} b_n x^{n-1} = \sum_{n \geq 0} \tilde{b}_{n+2} x^{n+1}, \quad (5.42)$$

donde hemos cambiando el índice: $n \rightarrow n+2$ en la suma. La relación de recurrencia para los nuevos coeficientes \tilde{b} es

$$b_{n+2} = -\frac{b_n + 2(n+1)a_n}{n(n+2)} \quad \Rightarrow \quad \tilde{b}_{n+4} = -\frac{\tilde{b}_{n+2} + 2(n+3)a_{n+2}}{(n+2)(n+4)}, \quad n \geq 0. \quad (5.43)$$

y la solución $y_2(x)$ queda reescrita como

$$y_2(x) = y_1(x) \log x + \frac{b_0}{x} + \sum_{n \text{ par} \geq 0} \tilde{b}_{n+2} x^{n+1} + \sum_{n \text{ impar} \geq 3} \tilde{b}_n x^{n-1}. \quad (5.44)$$

Sin embargo note que el primer término de la relación de recurrencia (5.43) es el mismo que la relación de recurrencia (5.20) y por lo tanto, si identificamos a \tilde{b}_{n+2} con a_n en la relación de recurrencia, podemos reescribir la relación como

$$\begin{aligned}\tilde{b}_{n+4} &= -\frac{\tilde{b}_{n+2}}{(n+2)(n+4)} - \frac{2(n+3)a_{n+2}}{(n+2)(n+4)} = -\frac{a_n}{(n+2)(n+4)} - \frac{2(n+3)a_{n+2}}{(n+2)(n+4)} \\ &= a_{n+2} - \frac{2(n+3)}{(n+2)(n+4)}a_{n+2}.\end{aligned}$$

Concluimos entonces que

$$\sum_{n \text{ par} \geq 0} \tilde{b}_{n+2}x^{n+1} = \frac{b_0}{a_0} \sum_{n \text{ par} \geq 0} a_n x^{n+1} + \sum_{n \text{ par} \geq 0} c_n x^{n+1} = y_1(x) + \sum_{n \text{ par} \geq 0} c_n x^{n+1}, \quad (5.45)$$

donde $c_n \equiv -\frac{2(n+1)}{n(n+2)}a_n$.

Por lo tanto podemos reescribir

$$\sum_{n \geq 2} b_n x^{n-1} = \frac{b_2}{a_0} y_1(x) + \sum_{n \geq 0} c_n x^{n+1} + \sum_{n=\text{impar}} \tilde{b}_{n+2} x^{n+1}, \quad (5.46)$$

y la forma más general posible de la segunda solución se puede reescribir como

$$y_2(x) = y_1(x) \log x + \frac{b_2}{a_0} y_1(x) + \frac{b_0}{x} + \sum_{n \geq 0} d_{n+2} x^{n+1}, \quad (5.47)$$

donde los coeficientes d incluyen a los coeficientes c y a los coeficientes \tilde{b} impares. Concluimos entonces que el papel de b_2 es introducir un múltiplo arbitrario constante de la primer solución, y por lo tanto la podemos escoger como queramos. Desde luego ¡la solución más simple se obtiene al escoger $b_2 = 0!$

Regresando a nuestra solución en términos de los coeficientes \tilde{b} , la solución es de la forma

$$y_2(x) = y_1(x) \log x + \frac{b_0}{x} + \sum_{n \geq 0} \tilde{b}_{n+2} x^{n+1}, \quad \text{con} \quad \tilde{b}_{n+4} = -\frac{\tilde{b}_{n+2} + 2(n+3)a_{n+2}}{(n+2)(n+4)}, \quad (5.48)$$

y con

$$b_0 = -2a_0, \quad b_1 = 0, \quad \text{y} \quad b_2 = \tilde{b}_2 = 0. \quad (5.49)$$

No olvide que el hecho de que $b_1 = 0 \Rightarrow \tilde{b}_3 = \tilde{b}_5 = \dots = \tilde{b}_{2n+1} = \dots = 0$, debido a la relación de recurrencia (5.43) de los coeficiente \tilde{b} y al hecho de que $a_n = 0$ para todas las n impares.

Una discusión similar se debe de dar para cualquier elección de un número entero \mathbb{N} tal que $2\nu = \mathbb{N}$ (esto incluye el caso $\nu = \frac{1}{2}$, cuya discusión fue pospuesta anteriormente).

Veamos que pasa con la serie de nuestro ejemplo

$$\sum_{n \geq 0} \tilde{b}_{n+2} x^{n+1} \quad \text{con} \quad \tilde{b}_{n+4} = -\frac{\tilde{b}_{n+2}}{(n+2)(n+4)} - \frac{2(n+3)}{(n+2)(n+4)} a_{n+2}. \quad (5.50)$$

Para ello calculemos algunos de los coeficientes explícitamente

$$\begin{aligned} \tilde{b}_4 &= -\frac{1}{2 \cdot 4} \tilde{b}_2 - \frac{2 \cdot 3}{2 \cdot 4} a_2 = -\frac{1}{2^2 1 \cdot 2} \tilde{b}_2 - \frac{2 \cdot 3}{2^2 1 \cdot 2} a_2 \quad \text{y dado que} \quad a_2 = -\frac{a_0}{2^2 \cdot 2} \\ &= \frac{-1}{2^2 1! 2!} \tilde{b}_2 + \frac{2 \cdot 3}{2^2 1! 2!} \frac{1}{2 \cdot 4} a_0 = \frac{1}{2^2 1! 2!} \left(-\tilde{b}_2 + \frac{3}{4} \right) a_0 \quad \text{y tomando} \quad \tilde{b}_2 = -\frac{a_0}{2} \\ \tilde{b}_4 &= \frac{1}{2^3 1! 2!} \left(1 + \frac{3}{2} \right) a_0. \end{aligned}$$

Si calculamos ahora para \tilde{b}_6 tenemos

$$\begin{aligned} \tilde{b}_6 &= -\frac{1}{4 \cdot 6} \tilde{b}_4 - \frac{2 \cdot 5}{4 \cdot 6} a_4 = -\frac{1}{2^2 2 \cdot 3} \tilde{b}_4 - \frac{2 \cdot 5}{2^2 2 \cdot 3} \left(\frac{a_0}{2^4 2! 2 \cdot 3} \right) \quad \text{y dado que} \quad a_4 = \frac{a_0}{2^4 2! 2 \cdot 3} \\ &= -\frac{1}{2^5 2! 3!} \left[\left(1 + \frac{3}{2} \right) a_0 + \frac{2 \cdot 5}{2 \cdot 2 \cdot 3} a_0 \right] = -\frac{1}{2^5 2! 3!} \left[\left(1 + \frac{3}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) \right] a_0 \\ \tilde{b}_6 &= -\frac{1}{2^5 2! 3!} \left[\left(1 + \frac{1}{2} \right) + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) \right] a_0, \end{aligned}$$

mientras que para

$$\begin{aligned} \tilde{b}_8 &= -\frac{1}{6 \cdot 8} \tilde{b}_6 - \frac{2 \cdot 7}{6 \cdot 8} a_6 = -\frac{1}{2^2 (3 \cdot 4)} \tilde{b}_6 - \frac{2 \cdot 7}{2^2 (3 \cdot 4)} a_6 \\ &= -\frac{1}{2^2 3 \cdot 4} (\tilde{b}_6 + 2 \cdot 7 a_6) \quad \text{y dado que} \quad a_6 = -\frac{a_0}{2^6 3! \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \\ &= \frac{1}{2^7 3! 4!} \left[\left(1 + \frac{1}{2} \right) + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) + \frac{2 \cdot 7}{2 \cdot 3 \cdot 4} \right] a_0 \\ \Rightarrow \tilde{b}_8 &= \frac{1}{2^7 3! 4!} \left[\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right) \right] a_0. \end{aligned}$$

En general para el coeficiente $2k$ -ésimo tenemos

$$\tilde{b}_{2k} = \frac{(-1)^k}{2^{2k-1} (k-1)! k!} [H_{k-1} + H_k] a_0 \quad \text{con} \quad H_k \equiv 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{k} \quad \text{y} \quad H_0 \equiv 0. \quad (5.51)$$

Con esta expresión para los \tilde{b}_n concluimos que

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 0} \tilde{b}_{n+2} x^{n+1} &= \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{b}_{2k} x^{2k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k [H_{k-1} + H_k]}{(k-1)! k!} \left(\frac{x}{2} \right)^{2k-1} a_0 \\ &= -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k [H_k + H_{k+1}]}{k! (k+1)!} \left(\frac{x}{2} \right)^{2k+1} a_0 \end{aligned}$$

donde en el último renglón hemos hecho el cambio de índice $k \rightarrow k + 1$.

Poniendo todos los ingredientes juntos en la ecuación (5.48) y considerando que $b_0 = -2a_0$, se tiene

$$y_2(x) = y_1 \log x - \frac{2a_0}{x} - a_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k [H_k + H_{k+1}]}{k!(k+1)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+1}. \quad (5.52)$$

Y recordando que $a_0 = \frac{1}{2}$, para el caso $\nu = 1$ obtenemos finalmente

$$y_2(x) = y_1 \log x - \frac{1}{x} - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k [H_k + H_{k+1}]}{k!(k+1)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+1}. \quad (5.53)$$

Sin embargo es costumbre trabajar con una función que difiere un poco de esta solución y a la cual se le conoce como la función de Bessel de segunda clase de orden $\nu = 1$ o función de Neuman, la cual se denota usualmente como N_1

$$N_1(x) = \frac{2}{\pi} J_1 \left(\ln \frac{x}{2} + \gamma \right) - \frac{2}{\pi x} - \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k [H_k + H_{k+1}]}{k!(k+1)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+1}. \quad (5.54)$$

En general las funciones de Bessel de segunda clase o funciones de Neuman de orden ν son:

$$N_\nu(x) = \frac{2}{\pi} J_\nu \left(\ln \frac{x}{2} + \gamma \right) - \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\nu-1} \frac{(\nu - k - 1)!}{k!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-\nu} - \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k [H_k + H_{\nu+k}]}{k!(\nu+k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}, \quad (5.55)$$

y constituyen la segunda solución linealmente independiente de la ecuación de Bessel (5.1), cuando 2ν es un número entero.

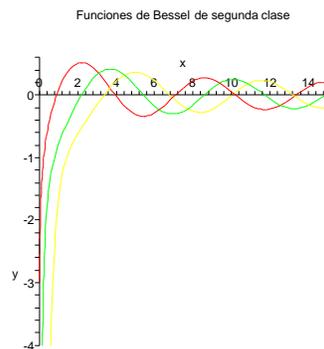


Figura 5.3: La figura muestra la gráfica de las funciones de Bessel de segunda clase: $J_0(x)$ (roja), $J_1(x)$ (verde) y $J_2(x)$ (amarilla).

La solución más general posible de la ecuación de Bessel para cualquier ν será entonces escrita como

$$y(x) = AJ_\nu + BN_\nu, \quad (5.56)$$

donde A y B son constantes que quedarán determinadas por las condiciones de frontera. Dado que N_ν diverge logarítmicamente, cualquier condición de frontera que requiera que la solución sea finita en el origen, automáticamente excluirá las funciones de Neuman, de la solución. Pero si no tenemos un requerimiento así, entonces debemos considerar también las funciones de Neuman en la solución.

Una manera alternativa de definir las funciones de Neuman es

$$N_\nu(x) = \frac{\cos(\nu\pi)J_\nu(x) - J_{-\nu}(x)}{\sin(\nu\pi)} \quad \text{para } \nu \text{ no entero.} \quad (5.57)$$

Para ν un número no entero, N_ν satisface claramente la ecuación de Bessel (5.1), dado que esta expresión es una combinación lineal de las soluciones conocidas J_ν y $J_{-\nu}$. Sin embargo para $\nu \in \mathbb{Z}$, sabemos que las funciones J_ν y $J_{-\nu}$ no son independientes y $N_\nu(x)$ definido de esta forma está indeterminado, sin embargo aplicando la regla de L'Hospital tenemos

$$\begin{aligned} N_n(x) &= \left. \frac{\frac{d}{d\nu} [\cos \nu\pi J_\nu(x) - J_{-\nu}(x)]}{\frac{d}{d\nu} \sin \nu\pi} \right|_{\nu=n} = \left. \frac{-\pi \sin n\pi J_n(x) + \left(\cos n\pi \frac{\partial J_\nu}{\partial \nu} - \frac{\partial J_{-\nu}}{\partial \nu} \right)}{\pi \cos n\pi} \right|_{\nu=n} \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{\partial J_\nu(x)}{\partial \nu} - (-1)^n \frac{\partial J_{-\nu}(x)}{\partial \nu} \right]_{\nu=n} \end{aligned}$$

5.3. Clase 20

5.3.1. Propiedades de las funciones de Bessel

Una vez que hemos obtenido los desarrollos en serie para J_ν y N_ν , estamos en condiciones de deducir algunas fórmulas que relacionan a las funciones de Bessel con sus derivadas. Las dos primeras son una consecuencia de la expresión general de las funciones de Bessel de primera clase (5.29) y se expresan como sigue

Propiedad 5.3.1

$$\frac{d}{dx} [x^\nu J_\nu(x)] = x^\nu J_{\nu-1}(x), \quad (5.58)$$

$$\frac{d}{dx} [x^{-\nu} J_\nu(x)] = -x^{-\nu} J_{\nu+1}(x). \quad (5.59)$$

Demostremos la propiedad (5.58)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} [x^\nu J_\nu(x)] &= \frac{d}{dx} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 2^\nu}{\Gamma(k+1)\Gamma(\nu+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+2\nu} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 2^\nu}{\Gamma(k+1)\Gamma(\nu+k+1)} \frac{2k+2\nu}{2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+2\nu-1} \\ &= x^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(\nu+k+1)} (k+\nu) \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+(\nu-1)}, \end{aligned}$$

y recordando que $\Gamma(\nu+k+1) = (\nu+k)\Gamma(\nu+k)$, obtenemos

$$\frac{d}{dx} [x^\nu J_\nu(x)] = x^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(\nu+k)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+(\nu-1)} = x^\nu J_{\nu-1}(x). \quad (5.60)$$

La demostración de la propiedad (5.59) se realiza de manera similar.

Si desarrollamos explícitamente la derivada en la propiedad (5.58) tenemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} [x^\nu J_\nu(x)] = x^\nu J_{\nu-1}(x) &\Rightarrow \nu x^{\nu-1} J_\nu(x) + x^\nu J'_\nu(x) = x^\nu J_{\nu-1}(x) \\ &\Rightarrow x J'_\nu + \nu J_\nu = x J_{\nu-1}. \end{aligned} \quad (5.61)$$

De manera similar si desarrollamos la derivada en la propiedad (5.59) tenemos

$$x J'_\nu - \nu J_\nu = -x J_{\nu+1}. \quad (5.62)$$

Restando las ecuaciones (5.61) y (5.62) obtenemos: $x J_{\nu-1} + x J_{\nu+1} = 2\nu J_\nu$, o equivalentemente

Propiedad 5.3.2 *Relación de recurrencia*

$$x J_{\nu+1} - 2\nu J_\nu + x J_{\nu-1} = 0. \quad (5.63)$$

Mientras que si las sumamos obtenemos: $2x J'_\nu = x J_{\nu-1} - x J_{\nu+1}$, o equivalentemente

Propiedad 5.3.3 *Relación de recurrencia*

$$J_{\nu+1} + 2J'_\nu - J_{\nu-1} = 0. \quad (5.64)$$

Estas relaciones de recurrencia entre las funciones de Bessel son de mucha utilidad en diferentes situaciones, por ejemplo, la relación (5.63) nos permite calcular una función de Bessel desconocida en términos de dos conocidas. Ilustremos esta propiedad con un ejemplo concreto.

Ejemplo 5.3.4 Las funciones de Bessel de primera clase de orden semientero.

Cuando $\nu = \frac{1}{2}$ obtenemos de la expresión general de las funciones de Bessel de primera clase (5.29)

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(k + \frac{3}{2})} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k + \frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(k + \frac{3}{2})} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}. \quad (5.65)$$

Dado que

$$\begin{aligned} \Gamma\left(k + \frac{3}{2}\right) &= \left(k + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(k + \frac{1}{2}\right) = \left(k + \frac{1}{2}\right) \left(k - \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(k - \frac{1}{2}\right) \\ &= \vdots \\ &= \underbrace{\left(\frac{2k+1}{2}\right) \cdots \left(\frac{7}{2}\right) \left(\frac{5}{2}\right) \left(\frac{3}{2}\right)}_{k \text{ términos}} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2^k} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) (2k+1)!! \\ &= \frac{1}{2^k} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \frac{(k+1)!}{2^k k!} = \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \frac{(k+1)!}{2^{2k} k!}, \end{aligned}$$

con lo cual podemos reescribir $J_{\frac{1}{2}}(x)$ como

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \frac{1}{\sqrt{2x} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} = \frac{1}{\sqrt{2x} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} \left(x - \frac{1}{3!} x^3 + \frac{1}{5!} x^5 + \cdots\right).$$

Pero la serie entre paréntesis la reconocemos como la serie de Taylor de la función trigonométrica seno. Recordando que $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ obtenemos finalmente

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x. \quad (5.66)$$

De manera similar podemos mostrar que

$$J_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x. \quad (5.67)$$

Dadas las funciones de Bessel $J_{-\frac{1}{2}}(x)$ y $J_{\frac{1}{2}}(x)$, es posible calcular todas las funciones de Bessel de orden semientero $J_{n+\frac{1}{2}}(x)$, con $n \in \mathbb{Z}$, utilizando la relación (5.63). Estas funciones tienen una representación finita en términos de funciones elementales⁴, por

⁴Por definición la clase de funciones elementales consiste de todas las funciones racionales (cocientes de polinomios), funciones trigonométricas, funciones exponenciales, y sus inversos.

ejemplo

$$\begin{aligned} J_{\frac{3}{2}}(x) &= \frac{2\left(\frac{1}{2}\right)}{x} J_{\frac{1}{2}}(x) - J_{-\frac{1}{2}}(x) = \frac{1}{x} \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x - \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left(\frac{\sin x}{x} - \cos x \right), \end{aligned} \quad (5.68)$$

$$\begin{aligned} J_{\frac{5}{2}}(x) &= \frac{2\left(\frac{3}{2}\right)}{x} J_{\frac{3}{2}}(x) - J_{\frac{1}{2}}(x) = \frac{3}{x} \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left(\frac{\sin x}{x} - \cos x \right) - \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left(\frac{3 \sin x}{x^2} - \frac{3 \cos x}{x} - \sin x \right), \end{aligned} \quad (5.69)$$

y así sucesivamente. Advertimos que las funciones de Bessel de orden semi-entero son las únicas funciones de Bessel con esta propiedad especial, siendo todas las demás funciones trascendentales que no pueden expresarse en forma cerrada en términos de funciones elementales.

5.3.2. Función generadora

A pesar de que el interés principal en las funciones de Bessel, es su característica de solución a una ecuación diferencial, es conveniente e instructivo desarrollarlas desde un punto de vista completamente diferente, el de la función generadora. Este punto de vista también tiene la ventaja de concentrar la atención sobre las funciones mismas, más que en las ecuaciones diferenciales que satisfacen.

Introduzcamos la función de dos variables

$$g(x, t) = e^{\frac{x}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)}. \quad (5.70)$$

Desarrollando esta función generadora en una serie de Laurent, obtenemos

$$e^{\frac{x}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) t^n \quad (5.71)$$

donde $J_n(x)$ es la función de Bessel de primera clase (de orden n entero). Desarrollando las exponenciales en serie de Maclaurin en $\frac{xt}{2}$ y $-\frac{x}{2t}$ tenemos

$$\begin{aligned} e^{\frac{xt}{2}} e^{-\frac{x}{2t}} &= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{xt}{2}\right)^r}{r!} \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \frac{\left(\frac{x}{2t}\right)^s}{s!} = \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{r!s!} \left(\frac{x}{2}\right)^{r+s} t^{r-s} \\ &= \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{n=-s}^{\infty} \frac{(-1)^s}{(n+s)!s!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2s} t^n = \sum_{n=-s}^{\infty} \left[\sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{(n+s)!s!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2s} \right] t^n. \end{aligned}$$

Comparando esta expresión con la ecuación (5.71), concluimos que la función de Bessel está dada por

$$J_n(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s!(n+s)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2s}, \quad (5.72)$$

la cual coincide con la ecuación (5.29). Note que la serie exhibe el comportamiento de la función de Bessel para x pequeña, ya que el primer término de la serie

$$J_n(x) \approx \frac{x^n}{2^n n!}, \quad (5.73)$$

de lo cual concluimos que $J_0(0) = 1$, $J_1(0) = J_2(0) = \dots = 0$.

Las funciones de Bessel oscilan pero no son periódicas excepto en el límite $x \rightarrow \infty$

Esta ecuación también vale para $n < 0$, ya que

$$J_{-n}(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s!(s-n)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2s-n} \quad (5.74)$$

dado que n es entero, $(s-n)! \rightarrow \infty$ para $s = 0, 1, \dots, (n-1)$. Podemos entonces considerar que la serie comienza en $s = n$

$$J_{-n}(x) = \sum_{s=n}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s!(s-n)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2s-n} = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^{s+n}}{(s+n)!s!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2s-n}, \quad (5.75)$$

donde hemos realizado el cambio de variable $s \rightarrow s + n$, en la primer suma. Comparando con la expresión de J_n obtenemos inmediatamente

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x) \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (5.76)$$

Comentemos finalmente que podemos remplazar en la serie $n \rightarrow \nu$ con ν un número no entero, para definir J_ν

$$J_\nu(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s!(\nu+s)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2s}. \quad (5.77)$$

¿Cómo justificamos este paso desde este punto de vista? Mostrando que esta ecuación satisface la ecuación diferencial de Bessel

$$x^2 J_\nu''(x) + x J_\nu'(x) + (x^2 - \nu^2) J_\nu(x) = 0. \quad (5.78)$$

5.3.3. Ortogonalidad de las funciones de Bessel

Si la ecuación de Bessel

$$x^2 \frac{d^2 J_\nu(x)}{dx^2} + x \frac{dJ_\nu(x)}{dx} + (x^2 - \nu^2) J_\nu(x) = 0, \quad (5.79)$$

depende del argumento kx en vez del argumento x , la ecuación se reescribe como

$$x^2 \frac{d^2 J_\nu(kx)}{dx^2} + x \frac{dJ_\nu(kx)}{dx} + (k^2 x^2 - \nu^2) J_\nu(kx) = 0. \quad (5.80)$$

Si ahora dividimos la ecuación por x entonces

$$x \frac{d^2 J_\nu(kx)}{dx^2} + \frac{dJ_\nu(kx)}{dx} + \left(k^2 x - \frac{\nu^2}{x} \right) J_\nu(kx) = 0. \quad (5.81)$$

Para obtener la ortogonalidad de las funciones de Bessel procederemos como lo hicimos con los polinomios de Legendre, sólo que ahora debemos tener cuidado con las condiciones de frontera. Por este motivo introducimos los parámetros a y $\alpha_{\nu m}$, donde $\alpha_{\nu m}$ es el m -ésimo cero de J_ν , esto es $J_\nu(\alpha_{\nu m}) = 0$ y a es el límite superior de la coordenada radial cilíndrica. Si $x \rightarrow \rho$ y $k = \frac{\alpha_{\nu m}}{a}$ tenemos que la ecuación de Bessel para el m -ésimo cero es

$$\rho \frac{d^2}{d\rho^2} J_\nu \left(\alpha_{\nu m} \frac{\rho}{a} \right) + \frac{d}{d\rho} J_\nu \left(\alpha_{\nu m} \frac{\rho}{a} \right) + \left(\frac{\alpha_{\nu m}^2}{a^2} \rho - \frac{\nu^2}{\rho} \right) J_\nu \left(\alpha_{\nu m} \frac{\rho}{a} \right) = 0 \quad (5.82)$$

Multiplicando esta ecuación por la función de Bessel para el n -ésimo cero, $J_\nu(\alpha_{\nu n} \frac{\rho}{a})$ y restandole el producto de la función de Bessel para el m -ésimo cero $J_\nu(\alpha_{\nu m} \frac{\rho}{a})$ y la ecuación de Bessel para el n -ésimo cero obtenemos

$$\begin{aligned} J_\nu \left(\alpha_{\nu n} \frac{\rho}{a} \right) \left[\rho \frac{d^2}{d\rho^2} J_\nu \left(\alpha_{\nu m} \frac{\rho}{a} \right) + \frac{d}{d\rho} J_\nu \left(\alpha_{\nu m} \frac{\rho}{a} \right) + \left(\frac{\alpha_{\nu m}^2}{a^2} \rho - \frac{\nu^2}{\rho} \right) J_\nu \left(\alpha_{\nu m} \frac{\rho}{a} \right) \right] - \\ J_\nu \left(\alpha_{\nu m} \frac{\rho}{a} \right) \left[\rho \frac{d^2}{d\rho^2} J_\nu \left(\alpha_{\nu n} \frac{\rho}{a} \right) + \frac{d}{d\rho} J_\nu \left(\alpha_{\nu n} \frac{\rho}{a} \right) + \left(\frac{\alpha_{\nu n}^2}{a^2} \rho - \frac{\nu^2}{\rho} \right) J_\nu \left(\alpha_{\nu n} \frac{\rho}{a} \right) \right] = 0 \end{aligned}$$

Con lo cual

$$\begin{aligned} J_\nu \left(\alpha_{\nu n} \frac{\rho}{a} \right) \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{d}{d\rho} J_\nu \left(\alpha_{\nu m} \frac{\rho}{a} \right) \right) - J_\nu \left(\alpha_{\nu m} \frac{\rho}{a} \right) \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{d}{d\rho} J_\nu \left(\alpha_{\nu n} \frac{\rho}{a} \right) \right) = \\ \frac{\alpha_{\nu n}^2 - \alpha_{\nu m}^2}{a^2} \rho J_\nu \left(\alpha_{\nu n} \frac{\rho}{a} \right) J_\nu \left(\alpha_{\nu m} \frac{\rho}{a} \right) \\ \Rightarrow \int_0^a J_\nu \left(\alpha_{\nu n} \frac{\rho}{a} \right) \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{d}{d\rho} J_\nu \left(\alpha_{\nu m} \frac{\rho}{a} \right) \right) d\rho - \int_0^a J_\nu \left(\alpha_{\nu m} \frac{\rho}{a} \right) \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{d}{d\rho} J_\nu \left(\alpha_{\nu n} \frac{\rho}{a} \right) \right) d\rho = \\ \frac{\alpha_{\nu n}^2 - \alpha_{\nu m}^2}{a^2} \int_0^a \rho J_\nu \left(\alpha_{\nu n} \frac{\rho}{a} \right) J_\nu \left(\alpha_{\nu m} \frac{\rho}{a} \right) d\rho. \end{aligned}$$

Integrando por partes el lado izquierdo tenemos

$$\rho J_\nu \left(\alpha_{\nu n} \frac{\rho}{a} \right) \frac{d}{d\rho} J_\nu \left(\alpha_{\nu m} \frac{\rho}{a} \right) \Big|_0^a - \rho J_\nu \left(\alpha_{\nu m} \frac{\rho}{a} \right) \frac{d}{d\rho} J_\nu \left(\alpha_{\nu n} \frac{\rho}{a} \right) \Big|_0^a. \quad (5.83)$$

Estos términos se anulan en $\rho = 0$, debido al factor multiplicativo ρ . En $\rho = a$ también se anulan debido a que $\alpha_{\nu n}$ y $\alpha_{\nu m}$ son raíces de J_ν

$$J_\nu \left(\alpha_{\nu n} \frac{\rho}{a} \right) \Big|_a = J_\nu(\alpha_{\nu n}) = 0, \quad J_\nu \left(\alpha_{\nu m} \frac{\rho}{a} \right) \Big|_a = J_\nu(\alpha_{\nu m}) = 0$$

con lo cual

$$\frac{\alpha_{\nu n}^2 - \alpha_{\nu m}^2}{a^2} \int_0^a \rho J_\nu \left(\alpha_{\nu m} \frac{\rho}{a} \right) J_\nu \left(\alpha_{\nu n} \frac{\rho}{a} \right) d\rho = 0.$$

Así si $\alpha_{\nu n} \neq \alpha_{\nu m}$

$$\int_0^a J_\nu \left(\alpha_{\nu m} \frac{\rho}{a} \right) J_\nu \left(\alpha_{\nu n} \frac{\rho}{a} \right) \rho d\rho = 0, \quad \text{ortogonalidad en el intervalo } \rho = [0, a].$$

Normalización

$$\int_0^a \left[J_\nu \left(\alpha_{\nu m} \frac{\rho}{a} \right) \right]^2 \rho d\rho = \frac{a^2}{2} [J_{\nu+1}(\alpha_{\nu m})]^2. \quad (5.84)$$

Ejemplo 5.3.5 Ecuación de Laplace en regiones cilíndricas (independientes de θ).

Consideremos la región cilíndrica $0 < r < 1$ y $0 < z < a$ sujeto a las condiciones de frontera

$$\Psi(1, z) = 0, \quad \Psi(\rho, a) = 0, \quad \text{y} \quad \Psi(\rho, 0) = f(r). \quad (5.85)$$

La ecuación de Laplace en este caso es

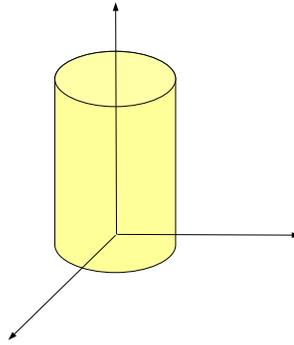


Figura 5.4: En la figura mostramos un cilindro hueco de radio r y altura a .

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Psi}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = 0. \quad (5.86)$$

Aplicando separación de variables tenemos

$$\Psi(\rho, z) = R(\rho)Z(z) \quad (5.87)$$

Con lo cual la ecuación de Laplace se separa en dos ecuaciones diferenciales ordinarias ($k = \nu = 0$, en la ec. (3.136))

$$R'' + \frac{1}{\rho} R' + \alpha^2 R = 0 \quad \text{ecuación de Bessel de orden } 0 \quad (5.88)$$

$$Z'' - \alpha^2 Z = 0 \quad \text{con} \quad \alpha = \text{cte.} \quad (5.89)$$

y las condiciones de frontera se reescriben como

$$R(1) = 0, \quad \text{y} \quad Z(a) = 0. \quad (5.90)$$

La solución a la ecuación de Bessel de orden cero es

$$R(\rho) = AJ_0(\alpha\rho) + BN_0(\alpha\rho) \quad \text{con } A \text{ y } B \text{ ctes.} \quad (5.91)$$

Como queremos que $R(\rho = 0)$ sea finita $\Rightarrow B = 0$, con lo cual la solución toma la forma

$$R(\rho) = AJ_0(\alpha\rho), \quad (5.92)$$

y de la condición $R(1) = 0$ tenemos $J_0(\alpha) = 0 \Rightarrow$ que α son los ceros positivos de J_0 , esto es

$$R_k(\rho) = J_0(\alpha_n\rho) \quad \text{con } n = 1, 2, \dots \quad (5.93)$$

Cuando $\alpha = \alpha_n$, la solución general de la ecuación (5.89) es

$$Z(z) = A \sinh(\alpha_n z) + B \cosh(\alpha_n z). \quad (5.94)$$

Como $Z(a) = 0$

$$A \sinh(\alpha_n a) + B \cosh(\alpha_n a) = 0 \quad \Rightarrow \quad B = -A \tanh(\alpha_n a), \quad (5.95)$$

y la función $Z(z)$ es

$$Z = \frac{A}{\cosh(\alpha_n a)} (\sinh(\alpha_n z) \cosh(\alpha_n a) - \cosh(\alpha_n z) \sinh(\alpha_n a)) = C \sinh \alpha_n (z - a). \quad (5.96)$$

De lo cual concluimos que la función Ψ es de la forma

$$\Psi_n(\rho, z) = C_n \sinh(\alpha_n(a - z))J_0(\alpha_n\rho), \quad \text{con } k = 1, 2, \dots \quad (5.97)$$

y satisface las condiciones de frontera $\Psi(1, z) = \Psi(\rho, a) = 0$. Nos falta sólo imponer la condición de frontera $\Psi(\rho, 0) = f(\rho)$.

La solución más general es pues

$$\Psi(\rho, z) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sinh(\alpha_n(a - z))J_0(\alpha_n\rho), \quad (5.98)$$

y satisface la condición de frontera

$$f(r) = \Psi(\rho, z = 0) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sinh(\alpha_n a)J_0(\alpha_n\rho). \quad (5.99)$$

Para calcular el valor de las constantes C_m , multiplicamos la ecuación por $J_0(\alpha_m\rho)$ y utilizamos la relación de ortogonalidad (5.84)

$$\begin{aligned} \int_0^1 J_0(\alpha_m\rho)f(\rho)\rho d\rho &= \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sinh(\alpha_n a) \int_0^1 J_0(\alpha_m\rho)J_0(\alpha_n\rho)\rho d\rho \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sinh(\alpha_n a) \frac{1}{2} J_1^2(\alpha_m) \delta_{mn} = \frac{C_m}{2} \sinh(\alpha_m a) J_1^2(\alpha_m). \end{aligned}$$

Con lo cual las constantes son

$$C_n = \frac{2}{\sinh(\alpha_n a) J_1^2(\alpha_n)} \int_0^1 J_0(\alpha_n \rho) f(\rho) \rho d\rho, \quad (5.100)$$

y la expresión final del potencial es

$$\Psi(\rho, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\sinh(\alpha_n a) J_1^2(\alpha_n)} \left[\int_0^1 J_0(\alpha_n \rho') f(\rho') \rho' d\rho' \right] \sinh(\alpha_n (a - z)) J_0(\alpha_n \rho). \quad (5.101)$$

5.4. Problemas

1. A partir del producto de las funciones generadoras $g(x, t) \cdot g(x, -t)$ muestre que

$$1 = [J_0(x)]^2 + 2[J_1(x)]^2 + [J_2(x)]^2 + \dots,$$

y por tanto que $|J_0(x)| \leq 1$ y $|J_n(x)| \leq 1/\sqrt{2}$, $n = 1, 2, 3, \dots$

2. Utilizando una función generadora $g(x, t) = g(u + v, t) = g(u, t) \cdot g(v, t)$, muestre que

$$a) \quad J_n(u + v) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} J_s(u) \cdot J_{n-s}(v),$$

$$b) \quad J_0(u + v) = J_0(u)J_0(v) + 2 \sum_{s=-\infty}^{\infty} J_s(u) \cdot J_{-s}(v),$$

3. Deduzca el desarrollo de Jacobi-Anger

$$e^{iz \cos \theta} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} i^m J_m(z) e^{im\theta}.$$

Este resultado es un desarrollo de una onda plana en una serie de ondas cilíndricas.

4. Muestre que

$$\cos x = J_0(x) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n J_{2n}(x),$$

$$\sin x = 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} J_{2n-1}(x).$$

5. Muestre que

$$\frac{\sin x}{x} = \int_0^{\pi/2} J_0(x \cos \theta) \cos \theta d\theta,$$

$$\frac{1 - \cos x}{x} = \int_0^{\pi/2} J_1(x \cos \theta) d\theta.$$

Ayuda: Usted tal vez necesitara utilizar la integral definida

$$\int_0^{\pi/2} \cos^{2s+1} \theta d\theta = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2s)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2s+1)}.$$

6. Muestre utilizando el principio de inducción matemática que

$$J_n(x) = (-1)^n x^n \left(\frac{d}{x dx} \right)^n J_0(x).$$

7. Una partícula de masa m está contenida en un cilindro circular recto de radio R y altura H . La partícula está descrita por una función de onda que satisface la ecuación de Schrödinger

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi(\rho, \phi, z) = E \psi(\rho, \phi, z),$$

y la condición que la función de onda se anula sobre la superficie del cilindro. Muestre que las energías sólo toman los valores

$$E = \frac{\hbar^2}{2m} \left[\left(\frac{z_{pq}}{R} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{H} \right)^2 \right],$$

donde z_{pq} es el q -ésimo cero de la función de Bessel J_p , y el índice p lo determina la dependencia azimutal. Muestre también que la energía mínima permitida es

$$E_{min} = \frac{\hbar^2}{2m} \left[\left(\frac{2,405}{R} \right)^2 + \left(\frac{\pi}{H} \right)^2 \right].$$

8. La amplitud $U(\rho, \phi, t)$ de una membrana circular vibrante de radio a satisface la ecuación de onda

$$\nabla^2 U - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 0,$$

donde v es la velocidad de fase de la onda, la cual queda determinada por la constante elástica y cualquier factor de amortiguamiento que se imponga.

a) Muestre que una solución es

$$U(\rho, \phi, t) = J_m(k\rho)(a_1 e^{im\phi} + a_2 e^{-im\phi})(b_1 e^{i\omega t} + b_2 e^{-i\omega t}).$$

b) A partir de la condición de frontera de Dirichlet, $J_m(ka) = 0$, encuentre los valores permitidos de la longitud de onda λ . ($k = 2\pi/\lambda$).

9. a) En el desarrollo en serie

$$f(\rho) = \sum_{m=1}^{\infty} c_{\nu m} J_{\nu} \left(\alpha_{\nu m} \frac{\rho}{a} \right), \quad 0 \leq \rho \leq a, \quad \nu - 1,$$

con $J_\nu(\alpha_{\nu m}) = 0$, muestre que los coeficientes están dados por

$$c_{\nu m} = \frac{2}{a^2 [J_{\nu+1}(\alpha_{\nu m})]^2} \int_0^a f(\rho) \left(\alpha_{\nu m} \frac{\rho}{a} \right) \rho d\rho.$$

b) En el desarrollo en serie

$$f(\rho) = \sum_{m=1}^{\infty} d_{\nu m} J_\nu \left(\beta_{\nu m} \frac{\rho}{a} \right), \quad 0 \leq \rho \leq a, \quad \nu > -1,$$

con

$$\left. \frac{d}{d\rho} J_\nu \left(\beta_{\nu m} \frac{\rho}{a} \right) \right|_{\rho=a} = 0,$$

muestra que los coeficientes están dados por

$$d_{\nu m} = \frac{2}{a^2 \left(1 - \frac{\nu^2}{\beta_{\nu m}^2} \right) [J_\nu(\beta_{\nu m})]^2} \int_0^a f(\rho) J_\nu \left(\beta_{\nu m} \frac{\rho}{a} \right) \rho d\rho.$$

10. Si se desarrolla una función $f(x)$ en una serie de Bessel

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n J_m(\alpha_{mn} x),$$

con α_{mn} la n -ésima raíz de J_m . Muestre la relación de Parseval

$$\int_0^1 [f(x)]^2 x dx = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 [J_{m+1}(\alpha_{mn})]^2.$$

6

Polinomios de Hermite

Los polinomios de Hermite son otras funciones especiales que debemos aprender en este curso. Es muy importante estudiar las características y las propiedades de los polinomios de Hermite, ya que ellos aparecen en uno de los problemas más importantes (para muchos, el más importante) de la mecánica cuántica, el del oscilador armónico. El oscilador armónico en mecánica cuántica tiene la misma importancia que en mecánica clásica, ya que cualquier perturbación de un sistema a partir de su estado de equilibrio dará origen a oscilaciones pequeñas, las cuales pueden ser descompuestas en modos normales, esto es, en oscilaciones independientes. Más aún, toda la física de partículas elementales, conocida técnicamente como la teoría cuántica de campos, se basa en expresar los diferentes campos, como una colección de osciladores armónicos cuánticos. El mensaje es: entienda lo mejor posible el problema del oscilador armónico.

Comenzaremos este capítulo planteando el problema del oscilador armónico 1D en mecánica cuántica y obteniendo la ecuación diferencial de Hermite que presentamos en el capítulo 2. Después nuestro trabajo consistirá en resolver la ecuación de Hermite y estudiar las propiedades básicas de sus soluciones.

6.1. Clase 21

6.1.1. Oscilador armónico

Nuestro punto de partida es la ecuación de Schrödinger 1D (3.15), para el oscilador armónico. En este caso la función potencial es cuadrática en las posiciones

$$V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2, \quad (6.1)$$

y por tanto la ecuación de Schrödinger estacionaria que necesitamos resolver es

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \Psi(x) + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \Psi(x) = E\Psi(x). \quad (6.2)$$

Con el objetivo de no cargar con las constantes del problema todo el tiempo, realicemos el cambio de variable siguiente

$$y = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} x \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dx} = \frac{dy}{dx} \frac{d}{dy} = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} \frac{d}{dy}. \quad (6.3)$$

Note que esta nueva variable es adimensional

$$[y] = \left[\frac{m\omega}{\hbar} \right]^{1/2} [x] = \left[\frac{M \cdot \frac{1}{T}}{M \cdot \frac{L^2}{T^2} \cdot T} \right]^{1/2} L = \left[\frac{1}{L^2} \right]^{1/2} \cdot L = 1 \quad (6.4)$$

En términos de esta variable, la ecuación de Schrödinger (6.2) se reescribe como

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{m\omega}{k} \frac{d^2}{dy^2} \Psi(y) + \frac{1}{2}m\omega^2 \frac{k}{m\omega} y^2 \Psi(y) = E\Psi(y) \quad (6.5)$$

con lo cual

$$-\frac{\omega\hbar}{2} \frac{d^2}{dy^2} \Psi(y) + \frac{1}{2}\omega\hbar y^2 \Psi(y) = E\Psi(y) \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2\Psi(y)}{dy^2} - y^2\Psi(y) = -\frac{2E}{\omega\hbar} \Psi(y).$$

Definiendo $\mathcal{E} = \frac{2E}{\omega\hbar}$ obtenemos finalmente ¹

$$\frac{d^2\Psi(y)}{dy^2} + (\mathcal{E} - y^2)\Psi(y) = 0. \quad (6.6)$$

Note que en esta ecuación todas las cantidades son adimensionales y que el dominio de definición de la variable y son los \mathbb{R} . La estrategia para resolver esta ecuación se divide en dos pasos. El primer paso consiste en estudiar el comportamiento de las soluciones

¹Note que esta nueva cantidad es adimensional, $[\mathcal{E}] = \left[\frac{E}{\omega\hbar} \right] = \left[\frac{M \frac{L^2}{T^2}}{\frac{1}{T} \cdot M \frac{L^2}{T^2} \cdot T} \right] = 1$.

para valores de $y \rightarrow \pm\infty$, al comportamiento de las soluciones en este régimen se le llama *comportamiento asintótico*. El segundo paso será estudiar el comportamiento de las soluciones cerca del origen, es decir cuando $y \rightarrow 0$.

Paso 1: Para cualquier valor propio \mathcal{E} , cuando $y^2 \rightarrow \infty$, el término \mathcal{E} en (6.6) es despreciable, y por tanto, la función propia $\Psi(y)$ debe satisfacer asintóticamente la ecuación

$$\frac{d^2\Psi_a(y)}{dy^2} - y^2\Psi_a(y) = 0, \quad \text{válida en } y \rightarrow \pm\infty, \quad (6.7)$$

donde el subíndice “a” significa asintóticamente. Si multiplicamos la ecuación por $2\frac{d\Psi_a}{dy}$ obtenemos

$$\begin{aligned} 2\frac{d\Psi_a}{dy}\frac{d^2\Psi_a(y)}{dy^2} - 2y^2\frac{d\Psi_a}{dy}\Psi_a(y) &= 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dy}\left(\frac{d\Psi_a}{dy}\right)^2 - y^2\frac{d}{dy}(\Psi_a^2) = 0 \\ \Rightarrow \frac{d}{dy}\left[\left(\frac{d\Psi_a}{dy}\right)^2 - y^2\Psi_a^2\right] + \Psi_a^2\frac{dy^2}{dy} &= 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dy}\left[\left(\frac{d\Psi_a}{dy}\right)^2 - y^2\Psi_a^2\right] = -2y\Psi_a^2. \end{aligned}$$

Esta ecuación se simplifica mucho si despreciamos el término de la derecha de la ecuación. Hagamos esto y justifiquemos después que la solución es correcta

$$\frac{d}{dy}\left[\left(\frac{d\Psi_a}{dy}\right)^2 - y^2\Psi_a^2\right] = 0 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{d\Psi_a}{dy}\right)^2 - y^2\Psi_a^2 = C \quad \Rightarrow \quad \frac{d\Psi_a}{dy} = \pm\sqrt{C + y^2\Psi_a^2},$$

donde C es una constante de integración. Dado que en mecánica cuántica las funciones que nos interesan son de cuadrado integrable, para que se satisfaga la ecuación (3.16), debe suceder que

$$\lim_{y^2 \rightarrow \infty} \Psi_a(y) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{y^2 \rightarrow \infty} \frac{d\Psi_a(y)}{dy} = 0 \quad \Rightarrow \quad C = 0$$

Con este valor de la constante, la ecuación se simplifica aún más

$$\frac{d\Psi_a}{dy} = \pm y\Psi_a \quad \Rightarrow \quad \int \frac{d\Psi_a}{\Psi_a} = \pm \int y dy \quad \Rightarrow \quad \ln \Psi_a = \pm \frac{y^2}{2} + C_0 \quad \Rightarrow \quad \Psi_a = C e^{\pm y^2/2}$$

Así, la solución más general posibles de la ecuación (6.7) es

$$\Psi_a(y) = C_1 e^{-y^2/2} + C_2 e^{y^2/2} \quad (6.8)$$

Como queremos que $\lim_{y^2 \rightarrow \infty} \Psi_a(y) = 0$, la única solución aceptable es $e^{-y^2/2}$ ($\Rightarrow C_2 = 0$)

$$\therefore \Psi_a(y) \approx e^{-y^2/2}. \quad (6.9)$$

Justifiquemos ahora que el haber despreciado el término $-2y\Psi_a^2$ es correcto. La ecuación que teníamos era

$$\frac{d}{dy}\left[\left(\frac{d\Psi_a}{dy}\right)^2 - y^2\Psi_a^2\right] = -2y\Psi_a^2,$$

y dada la solución asintótica obtenida, el término que despreciamos es $-2y\Psi_a^2 \approx -2ye^{-y^2}$, mientras que

$$\frac{d}{dy}(-y^2\Psi_a^2) \approx \frac{d}{dy}(-y^2e^{-y^2}) = -y^2(-2y)e^{-y^2} - 2ye^{-y^2} = 2y^3e^{-y^2} - 2ye^{-y^2} \approx_{y \rightarrow \infty} 2y^3e^{-y^2}.$$

Así en el límite $y^2 \rightarrow \infty$, el término $2ye^{-y^2}$ es despreciable respecto al término $y^3e^{-y^2}$, lo cual justifica el hecho de que lo hayamos despreciado.

Pero nuestro objetivo es resolver la ecuación (6.6)

$$\frac{d^2\Psi}{dy^2} + (\mathcal{E} - y^2)\Psi = 0 \quad \forall y, \text{ y no solo en el límite: } y^2 \rightarrow \infty. \quad (6.10)$$

Para resolver la ecuación en todo el dominio de definición de y , escribimos la función propia $\Psi(y)$ como un producto de dos funciones, donde una de ellas es su solución asintótica

$$\Psi(y) \equiv h(y)\Psi_a(y) = h(y)e^{-y^2/2} \quad (6.11)$$

Con esta propuesta la segunda derivada de u respecto a la variable y es ahora

$$\begin{aligned} \frac{d^2\Psi}{dy^2} &= \frac{d^2}{dy^2} \left(h(y)e^{-y^2/2} \right) = \frac{d}{dy} \left(\frac{dh(y)}{dy} e^{-y^2/2} - yh(y)e^{-y^2/2} \right) \\ &= \frac{d^2h(y)}{dy^2} e^{-y^2/2} - y \frac{dh(y)}{dy} e^{-y^2/2} - h(y)e^{-y^2/2} - y \frac{dh(y)}{dy} e^{-y^2/2} + y^2 h(y)e^{-y^2/2} \\ &= \left(\frac{d^2h(y)}{dy^2} - 2y \frac{dh(y)}{dy} + (y^2 - 1)h(y) \right) e^{-y^2/2}, \end{aligned}$$

y la ecuación (6.6) se reescribe como

$$\begin{aligned} &\left(\frac{d^2h(y)}{dy^2} - 2y \frac{dh(y)}{dy} + (y^2 - 1)h(y) \right) e^{y^2/2} + (\mathcal{E} - y^2)h(y)e^{-y^2/2} = 0 \\ \Rightarrow &\frac{d^2h(y)}{dy^2} - 2y \frac{dh(y)}{dy} + (\mathcal{E} - 1)h(y) = 0, \quad \text{Ecuación de Hermite.} \quad (6.12) \end{aligned}$$

Parece que no hemos ganado mucho, pero si lo hemos hecho. Ya conocemos el comportamiento de $\Psi(y)$ en $y^2 \rightarrow \infty$. Entonces podemos preocuparnos ahora por el comportamiento de $h(y)$ en $y \rightarrow 0$ y la ecuación que gobierna este comportamiento es la ecuación de Hermite. Como vimos en la sección 3.4.1, la ecuación de Hermite sólo tiene una singularidad en ∞ . Por tanto, si queremos resolver la ecuación cerca del origen, podemos emplear sin ningún problema el método de Frobenius.

Propongamos entonces que $h(y)$ puede escribirse como una serie de potencias alrededor del origen

$$h(y) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m y^m. \quad (6.13)$$

Dado que la primera y segunda derivadas de $h(y)$ son

$$\begin{aligned}\frac{d}{dy}h(y) &= \sum_{m=0}^{\infty} a_m m y^{m-1} \\ \frac{d^2}{dy^2}h(y) &= \frac{d^2}{dy^2} \sum_{m=0}^{\infty} a_m y^m = \frac{d}{dy} \sum_{m=0}^{\infty} a_m m y^{m-1} = \sum_{m=0}^{\infty} a_m m(m-1) y^{m-2},\end{aligned}$$

tenemos sustituyendo $h(y)$ en la ecuación de Hermite (6.12)

$$\begin{aligned}\sum_{m=0}^{\infty} a_m m(m-1) y^{m-2} - 2y \sum_{m=0}^{\infty} a_m m y^{m-1} + (\mathcal{E} - 1) \sum_{m=0}^{\infty} a_m y^m &= 0 \\ \Rightarrow \sum_{m=0}^{\infty} a_m m(m-1) y^{m-2} - \sum_{m=0}^{\infty} a_m (2m - \mathcal{E} + 1) y^m &= 0.\end{aligned}$$

Realizando el cambio de índice: $m - 2 = n$ en el primer sumando, podemos reescribirlo como

$$\begin{aligned}\sum_{m=0}^{\infty} a_m m(m-1) y^{m-2} &= \sum_{n=-2}^{\infty} a_{n+2} (n+2)(n+2-1) y^n = \sum_{n=-2}^{\infty} a_{n+2} (n+2)(n+1) y^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2} (n+2)(n+1) y^n = \sum_{m=0}^{\infty} a_{m+2} (m+2)(m+1) y^m,\end{aligned}$$

y por tanto la ecuación de Hermite se reescribe como

$$\sum_{m=0}^{\infty} [a_{m+2} (m+2)(m+1) - a_m (2m - \mathcal{E} + 1)] y^m = 0. \quad (6.14)$$

Dado que las potencias de y son linealmente independientes, para que esta ecuación se satisfaga debe suceder que los coeficiente se anulan idénticamente, con lo cual obtenemos la ecuación de recurrencia

$$a_{m+2} = \frac{2m - \mathcal{E} + 1}{(m+1)(m+2)} a_m. \quad (6.15)$$

De la inspección de esta relación de recurrencia concluimos que: dado a_0 podemos encontrar a_2, a_4, \dots , esto es, podemos generar la serie de potencias pares de $h(y)$ y dado el coeficiente a_1 podemos encontrar a_3, a_5, \dots , esto es, podemos generar la serie de potencias impares de $h(y)$. Desde luego a estas alturas esto no es una sorpresa para usted, estas son las dos soluciones linealmente independientes que se obtienen para la ecuación diferencial

de Hermite. Explícitamente, dado a_0^2

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{1}{2}(1 - \mathcal{E})a_0, & 1 \text{ recursión,} \\ a_4 &= \frac{1}{24}(5 - \mathcal{E})(1 - \mathcal{E})a_0, & 2 \text{ recursiones,} \\ &\vdots = \vdots \end{aligned}$$

y dado a_1

$$\begin{aligned} a_3 &= \frac{1}{6}(3 - \mathcal{E})a_1, & 1 \text{ recursión,} \\ a_5 &= \frac{1}{120}(7 - \mathcal{E})(3 - \mathcal{E})a_1, & 2 \text{ recursiones,} \\ &\vdots = \vdots \end{aligned}$$

¿Cómo encontramos las fórmulas de recursión? Consideremos el caso par, $m = 2k$ con $k \in \mathbb{N}$, en este caso tenemos que la relación de recurrencia (6.15) es

$$a_{2k+2} = \frac{4k + 1 - \mathcal{E}}{(2k + 1)(2k + 2)} a_{2k}. \quad (6.16)$$

Dandole valores a k se tiene

$$\begin{aligned} k = 0 &\Rightarrow a_2 = \frac{1}{1 \cdot 2}(1 - \mathcal{E})a_0, \\ k = 1 &\Rightarrow a_4 = \frac{1}{3 \cdot 4}(5 - \mathcal{E})a_2 = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}(5 - \mathcal{E})(1 - \mathcal{E})a_0, \\ &\vdots = \vdots \\ 2k &\Rightarrow a_{2k+2} = \frac{1}{(2k + 2)!} \underbrace{(4k + 1 - \mathcal{E})(4(k - 1) + 1 - \mathcal{E}) \cdots (4(1) + 1 - \mathcal{E})(1 - \mathcal{E})}_{(k+1) \text{ términos}} a_0. \end{aligned}$$

Si m es impar $m = 2k + 1$ la relación de recurrencia se escribe como

$$a_{2k+1+2} = \frac{2(2k + 1) + 1 - \mathcal{E}}{(2k + 1 + 1)(2k + 1 + 2)} a_{2k+1}, \quad (6.17)$$

con lo cual se tiene que los primeros términos son de la forma

$$\begin{aligned} k = 0 &\Rightarrow a_3 = \frac{1}{2 \cdot 3}(3 - \mathcal{E})a_1, \\ k = 1 &\Rightarrow a_5 = \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}(2 \cdot 3 + 1 - \mathcal{E})(2 \cdot 1 + 1 - \mathcal{E})a_1, \\ &\vdots = \vdots \\ &a_{2k+3} = \frac{1}{(2k + 3)!} \underbrace{(4k + 3 - \mathcal{E})(4(k - 1) + 3 - \mathcal{E}) \cdots (4(1) + 3 - \mathcal{E})(3 - \mathcal{E})}_{(k+1) \text{ términos}} a_1. \end{aligned}$$

²Comentario: Físicamente, que la serie par e impar no se mezclen es una consecuencia de la invariancia del Hamiltoniano ante reflexiones $[\hat{P}_1, \hat{H}] = 0$.

Hasta ahora no hemos dicho nada de los valores propios \mathcal{E} . Tratemos de decir algo sobre ellos. Notemos que para m muy grandes, esto es, $m \gg N$ con N un número entero fijo

$$a_{m+2} = \frac{2m - \mathcal{E} + 1}{(m+1)(m+2)} a_m \Rightarrow a_{m+2} \approx \frac{2}{m} a_m, \quad \text{cuando } m \gg N. \quad (6.18)$$

De manera similar

$$a_{m+4} \approx \frac{2}{m+2} a_{m+2} = \frac{2}{m+2} \cdot \frac{2}{m} a_m, \quad \text{cuando } m \gg N, \quad (6.19)$$

etc. Utilicemos este resultado para reescribir la solución polinomial. Por ejemplo, para una solución par tenemos

$$\begin{aligned} h(y) &= \underbrace{a_0 + a_2 y^2 + a_4 y^4 + \cdots + a_{N-2} y^{N-2}} + a_N y^N + a_{N+2} y^{N+2} + a_{N+4} y^{N+4} + \cdots \\ &= \text{Polinomio de grado } y^{N-2} + a_N y^N + a_{N+2} y^{N+2} + a_{N+4} y^{N+4} + \cdots, \end{aligned}$$

y utilizando los resultados (6.18) y (6.19), etc., podemos reescribir el polinomio en la forma

$$\begin{aligned} h(y) &\approx \text{Polinomio}(y) + a_N y^N + \frac{2}{N} a_N y^{N+2} + \frac{2}{N+2} \cdot \frac{2}{N} a_N y^{N+4} + \cdots \\ &= \text{Polinomio}(y) + a_N y^2 \left(y^{N-2} + \frac{1}{\left(\frac{N}{2}\right)} y^N + \frac{1}{\left(\frac{N}{2}\right)\left(\frac{N}{2}+1\right)} y^{N+2} + \cdots \right) \\ &= \text{Polinomio}(y) + a_N y^2 \left(\frac{N}{2} - 1 \right)! \left(\frac{(y^2)^{\frac{N}{2}-1}}{\left(\frac{N}{2}-1\right)!} + \frac{(y^2)^{\frac{N}{2}}}{\left(\frac{N}{2}\right)!} + \frac{(y^2)^{\frac{N}{2}+1}}{\left(\frac{N}{2}+1\right)!} + \cdots \right). \end{aligned}$$

Pero recordemos que N es par, esto es $N = 2s$

$$\begin{aligned} h(y) &\approx \text{Polinomio}(y) + a_{2s} y^2 (s-1)! \left(\frac{(y^2)^{s-1}}{(s-1)!} + \frac{(y^2)^s}{s!} + \frac{(y^2)^{s+1}}{(s+1)!} + \cdots \right) \\ &\approx \text{Polinomio}(y) + a_{2s} y^2 (s-1)! \left(e^{y^2} - \left(1 + y^2 + \frac{(y^2)^2}{2!} + \cdots + \frac{(y^2)^{(s-2)}}{(s-2)!} \right) \right), \end{aligned}$$

donde hemos hecho uso de la serie de Taylor (1.1) de la función exponencial: $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$. Concluimos entonces que

$$\begin{aligned} h(y) &\approx \underbrace{\text{Polinomio}(y)}_{\text{de grado } y^{2s-2}} + a_{2s} y^2 (s-1)! e^{y^2} - \underbrace{a_{2s} y^2 (s-1)! \left(1 + y^2 + \frac{(y^2)^2}{2!} + \cdots + \frac{(y^2)^{(s-2)}}{(s-2)!} \right)}_{\text{polinomio de grado } y^{2s-2}} \\ &\approx \underbrace{\text{Polinomio de grado } y^{2s-2}}_{\text{suma de 2 polinomios}} + a_{2s} y^2 (s-1)! e^{y^2}. \end{aligned}$$

Dado que $\Psi(y) = h(y)e^{-y^2/2}$ entonces

$$\Psi(y) \approx (\text{polinomio de orden } y^{2s-2}) e^{-y^2/2} + a_{2s}(s-1)! y^2 e^{y^2/2}. \quad (6.20)$$

Pero en el régimen $y^2 \rightarrow \infty$, en el segundo término $e^{y^2/2} \rightarrow \infty$, lo cual nos produce una función $\Psi(x)$ que no es de cuadrado integrable. La única forma de que esto no suceda es que el término de $e^{y^2/2}$ se anule, esto sucede cuando: $a_{2s} = 0$. Como consecuencia la serie en y se corta en la potencia $(y^2)^{2s-2}$, o equivalentemente, $a_N = 0$ para algún N par. Pero hemos visto que

$$\begin{aligned} a_{2k+2} &= \frac{\overbrace{(4k+1-\mathcal{E})(4(k-1)+1-\mathcal{E}) \cdots (4(1)+1-\mathcal{E})(1-\mathcal{E})}^{k+1 \text{ terminos}}}{(2k+2)!} a_0, \\ \Rightarrow a_{N+2} &= \frac{\overbrace{(2N+1-\mathcal{E})(2(N-2)+1-\mathcal{E}) \cdots (4(1)+1-\mathcal{E})(1-\mathcal{E})}^{k+1 \text{ terminos}}}{(N+2)!} a_0. \end{aligned}$$

Para que $a_{N+2} = 0$, debe suceder que $2N+1-\mathcal{E} = 0$, de lo cual concluimos que

$$\mathcal{E} = 2N + 1. \quad (6.21)$$

En este caso tenemos entonces que

$$a_{N+2} = 0, \quad a_{N+4} = 0, \quad a_{N+6} = 0, \quad \text{etc.} \quad (6.22)$$

y la solución es de la forma

$$\Psi(y) = h_N(y)e^{-y^2/2} = (a_0 + a_2y^2 + \cdots + a_Ny^N)e^{-y^2/2}. \quad (6.23)$$

Hemos resuelto así la ecuación (6.6), las funciones propias y los valores propios son

$$\Psi(y) = h_N(y)e^{-y^2/2}, \quad \mathcal{E} = 2N + 1, \quad (6.24)$$

donde los polinomios $h_N(y)$, son polinomios de orden N

$$h_N(y) = a_0 + a_2y^2 + \cdots + a_Ny^N. \quad (6.25)$$

Los coeficientes no nulos quedan determinados por la constante a_0 a través de la relación

$$\begin{aligned} a_{2k} &= \frac{[4(k-1)+1-(2N+1)][4(k-2)+1-(2N+1)] \cdots [1-(2N+1)]}{(2k)!} a_0 \\ &= \frac{(4(k-1)-2N)(4(k-2)-2N) \cdots (-2N)}{(2k)!} a_0 \\ &= (-2)^k \frac{N(N-2) \cdots (N-2k+4)(N-2k+2)}{(2k)!} a_0. \end{aligned}$$

De lo cual concluimos que

$$a_{2k} = (-2)^k \frac{N(N-2)(N-4)\cdots(N-2k+4)(N-2k+2)}{(2k)!} a_0. \quad (6.26)$$

Los primeros polinomios tienen la forma:

$$\begin{aligned} \text{Para: } N = 0 \text{ y } \mathcal{E} = 1, & \quad H_0(y) = a_0, \\ \text{Para: } N = 2 \text{ y } \mathcal{E} = 5, & \quad a_2 = (-2)^1 \frac{2}{2!} a_0 = -2a_0 \Rightarrow H_2(y) = a_0 - 2a_0 y^2, \\ \text{Para: } N = 4 \text{ y } \mathcal{E} = 9, & \quad a_4 = (-2)^2 \frac{4 \cdot 2}{4!} a_0 = \frac{4}{3} a_0 \Rightarrow H_4(y) = a_0 - 2a_0 y^2 + \frac{4}{3} a_0 y^4, \\ & \quad \vdots \quad \vdots \end{aligned}$$

Podemos hacer el mismo análisis para las series impares y el resultado que se obtiene es análogo. La serie se corta y los coeficientes quedan determinados por a_1 a través de la relación

$$a_{2k+1} = (-2)^k \frac{(N-1)(N-3)\cdots(N-2k+3)(N-2k+1)}{(2k+1)!} a_1, \quad \text{con: } \mathcal{E} = 2N + 1. \quad (6.27)$$

Los primeros polinomios tienen la forma:

$$\begin{aligned} \text{Para: } N = 1 \text{ y } \mathcal{E} = 3, & \quad H_1(y) = a_1, \\ \text{Para: } N = 3 \text{ y } \mathcal{E} = 7, & \quad a_3 = (-2)^1 \frac{(3-1)}{3!} a_1 = -\frac{2}{3} a_1 \Rightarrow H_3 = a_1 y - \frac{2}{3} a_1 y^3, \\ \text{Para: } N = 5 \text{ y } \mathcal{E} = 11, & \quad a_5 = (-2)^2 \frac{(5-1)(5-3)}{5!} a_1 = \frac{4}{15} a_1 \\ & \quad \Rightarrow H_5 = a_1 y - \frac{2}{3} a_1 y^3 + \frac{4}{15} a_1 y^5, \\ & \quad \vdots \quad \vdots \end{aligned}$$

Los polinomios $h(y)$ son, hasta constantes de normalización, los polinomios de Hermite $H_n(y)$. En la próxima sección discutiremos la normalización de estos polinomios.

Conclusiones:

Los valores propios son discretos e igualmente espaciados. La combinación de las ecuaciones: $\mathcal{E} = 2N + 1$ y $\mathcal{E} = \frac{2E}{\omega\hbar} \Rightarrow E = \omega\hbar \left(n + \frac{1}{2}\right)$ con: $n = 0, 1, 2, 3, \dots$. Reconocemos a esta ecuación, como la relación entre E y ω descubierta por Planck salvo el término aditivo $\frac{1}{2}\omega\hbar$. Esto no es un accidente ya que la descomposición del campo electromagnético en modos normales, es esencialmente, una descomposición en modos normales que están desacoplados.

6.2. Clase 22

6.2.1. Polinomios de Hermite

Hemos visto que los polinomios de Hermite son de la forma

$$\begin{aligned} h_N(y) &= a_0 + a_2x^2 + \cdots + a_Nx^N, & \text{para: } N \text{ par,} \\ h_N(y) &= a_1x + a_3x^3 + \cdots + a_Nx^N & \text{para: } N \text{ impar,} \end{aligned}$$

donde los coeficientes satisfacen la relaciones de recurrencia

$$a_{2k} = (-2)^k \frac{N(N-2)(N-4)\cdots(N-2k+4)(N-2k+2)}{(2k)!} a_0, \quad \text{con: } N \text{ par,} \quad (6.28)$$

$$a_{2k+1} = (-2)^k \frac{(N-1)(N-3)\cdots(N-2k+3)(N-2k+1)}{(2k+1)!} a_1, \quad \text{con: } N \text{ impar.} \quad (6.29)$$

Así, los primeros polinomios tienen la forma

$$\begin{aligned} h_0(x) &= a_0, \\ h_1(x) &= a_1x, \\ h_2(x) &= a_0 - 2a_0x^2, \\ h_3(x) &= a_1x - \frac{2}{3}a_1x^3, \\ h_4(x) &= a_0 - 2a_0x^2 + \frac{4}{3}a_0x^4, \\ h_5(x) &= a_1x - \frac{2}{3}a_1x^3 + \frac{4}{15}a_1x^5. \end{aligned}$$

¿Cómo encontramos los coeficientes a_0 y a_1 ? ¡Normalizando!

Recordemos que para los polinomios de Legendre la normalización se escoge de manera tal que $P_n(1) = 1$ con lo cual $\int_{-1}^1 P_n(x)P_m(x)dx = \frac{2}{2n+1}\delta_{n,m}$.

En particular $P_0(x) = a_0$ y $P_0(1) = 1 \Rightarrow a_0 = 1 \Rightarrow P_0(x) = 1$. O de la relación de ortogonalidad

$$\int_{-1}^1 a_0^2 dx = 2 \Rightarrow a_0^2 2 = 2 \Rightarrow a_0^2 = 1 \Rightarrow a_0 = 1.$$

Pero para los polinomios de Hermite

$$\int_{-\infty}^{\infty} h_0^2(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} a_0^2 dx = a_0^2 x \Big|_{-\infty}^{\infty} \rightarrow \infty \text{ ¡diverge!}$$

¿Qué sucede? El punto es que si $f(x)$ y $g(x)$ son funciones continuas por tramos arbitrarias en el intervalo $(-\infty, \infty)$, no se puede garantizar que la integral impropia

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)dx = \lim_{a \rightarrow \infty, b \rightarrow \infty} \int_{-a}^b f(x)g(x)dx \rightarrow \text{converja.} \quad (6.30)$$

De hecho esta integral es indefinida aún cuando f y g sean polinomios \Rightarrow ¡la definición usual de producto interior no es válida!

¿Qué hacemos? ¡Debemos considerar otro producto interior!

$$\int_{-\infty}^{\infty} w(x)P(x)g(x) dx, \quad (6.31)$$

donde $\omega(x)$ es conocida como la función de peso. Es decir, estamos insistiendo en que cualquier espacio de funciones que consideremos contiene todos los polinomios y que su producto interior esté definido por medio de una integral impropia sobre toda la recta real. Es claro que $\omega(x)$ no puede ser cualquier función, ya que debe hacer el trabajo de que la integral (6.31) converja. La función $\omega(x)$ debe entonces satisfacer algunos requisitos.

Requisitos de la función $\omega(x)$:

- ω debe ser continua en toda la recta real.
- $\lim_{|x| \rightarrow \infty} \omega(x) \rightarrow 0$.
- Más aún, $\lim_{|x| \rightarrow \infty} \omega(x)x^n \rightarrow 0$.

La experiencia adquirida en nuestros cursos de cálculo nos sugiere que: $\omega(x) = e^{-x^2}$. De hecho en su tarea usted mostrará que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} x^n dx = \begin{cases} \frac{(2n)!}{2^n n!} \sqrt{\pi} & n = 0, 2, 4, 6, \dots, \text{ pares} \\ 0 & n = 1, 3, 5, 7, \dots, \text{ impares} \end{cases} \quad (6.32)$$

¿En que espacio viven los polinomios de Hermite? Definamos con un poco más de precisión este espacio a través de los siguientes teoremas, los cuales no demostraremos.

Teorema 6.2.1 L_2^ω es un espacio Euclidean en el que se satisfacen las definiciones usuales de adición y multiplicación por escalar de las funciones continuas por tramos y del producto interior

$$\langle f|g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} f(x)g(x) dx. \quad (6.33)$$

Teorema 6.2.2 L_2^ω es el conjunto de todas las funciones continuas por tramos en $(-\infty, \infty)$ que puedan expresarse como límites, o fronteras, en la media, de sucesiones de polinomios.

La base del espacio L_2^ω son los polinomios de Hermite, cuyo producto interior está dado por

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n(x)H_m(x)dx = 2^n n! \sqrt{\pi} \delta_{nm}. \quad (6.34)$$

Note que hemos escrito en esta relación $H_n(x)$ en vez de $h_n(x)$. La razón de este cambio de notación se debe a que comunmente los polinomios se denotan por la letra H una vez normalizados. Podemos calcular una a una el valor de las constantes de los diferentes polinomios h_n que tenemos y obtener así los polinomios de hermite H_n . Una manera alternativa es calcularlos a través de una función generadora análoga a la fórmula de Rodrigues que estudiamos para los polinomios de Legendre. Definimos así los polinomios de Hermite como los polinomios que se generan por la relación

$$H_n(x) \equiv (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}, \quad \text{con: } n = 0, 1, 2, \dots \quad (6.35)$$

Por cálculo directo obtenemos

$$H_0(x) = 1. \quad (6.36)$$

$$H_1(x) = (-1)e^{x^2} \frac{d}{dx} e^{-x^2} = 2x. \quad (6.37)$$

$$H_2(x) = e^{x^2} \frac{d^2}{dx^2} e^{-x^2} = -2e^{x^2} \frac{d}{dx} (xe^{-x^2}) = 4x^2 - 2. \quad (6.38)$$

$$H_3(x) = -e^{x^2} \frac{d^3}{dx^3} e^{-x^2} = -e^{-x^2} \frac{d}{dx} [(4x^2 - 2)e^{-x^2}] = -8x + 2x(4x^2 - 2) \quad (6.39)$$

$$= 8x^3 - 12x. \quad (6.40)$$

$$\vdots = \vdots$$

En la siguiente tabla, damos la expresión para los primeros 10 polinomios de Hermite.

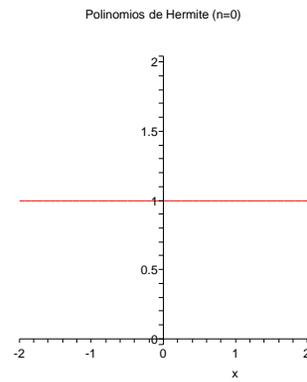
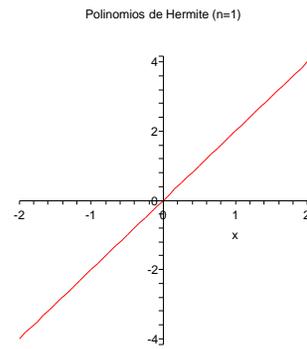
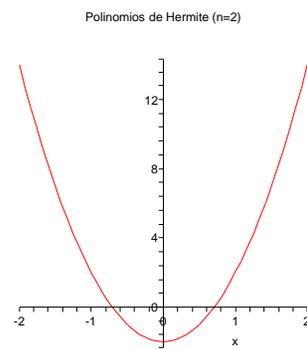
n	$H_n(x)$
0	1
1	x
2	$4x^2 - 2$
3	$8x^3 - 12x$
4	$16x^4 - 48x^2 + 12$
5	$32x^5 - 160x^3 + 129x$
6	$64x^6 - 480x^4 + 720x^2 - 120$
7	$128x^7 - 1344x^5 + 3360x^3 - 1680x$
8	$256x^8 - 3584x^6 + 13440x^4 - 13440x^2 + 1680$
9	$512x^9 - 9216x^7 + 48384x^5 - 80640x^3 + 30240x$
10	$1024x^{10} - 23040x^8 + 161280x^6 - 403200x^4 + 302400x^2 - 30240$

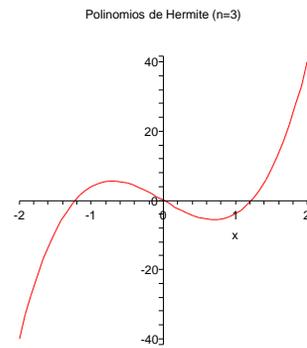
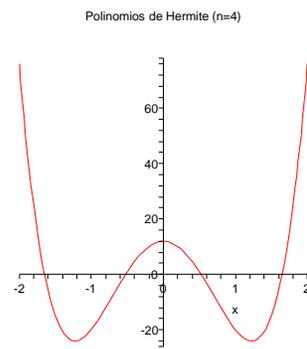
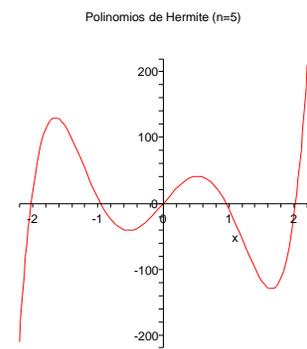
Note que los polinomios de Hermite satisfacen la siguiente relación de paridad

$$H_n(x) = (-1)^n H_n(-x), \quad (6.41)$$

y las relaciones de recurrencia siguientes

$$\begin{aligned} H_{n+1}(x) - 2xH_n(x) + 2nH_{n-1}(x) &= 0, \\ H_{n+1}(x) + \frac{dH_n(x)}{dx} - 2xH_n(x) &= 0. \end{aligned}$$

Figura 6.1: Gráfica de $H_0(x)$.Figura 6.2: Gráfica de $H_1(x)$.Figura 6.3: Gráfica de $H_2(x)$.

Figura 6.4: Gráfica de $H_3(x)$.Figura 6.5: Gráfica de $H_4(x)$.Figura 6.6: Gráfica de $H_5(x)$.

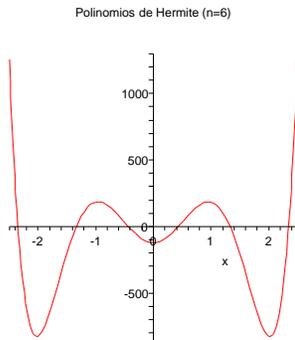


Figura 6.7: Gráfica de $H_6(x)$.

Los polinomios de Hermite también se pueden definir a través de una función generadora

$$g(x, t) = e^{-t^2+2tx} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x) \frac{t^n}{n!}. \quad (6.42)$$

6.3. Problemas

1. A partir de la función generadora muestre que

$$H_n(x) = \sum_{s=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^s \frac{n!}{(n-2s)!s!} (2x)^{n-2s}.$$

2. A partir de la función generadora muestre las siguientes relaciones de los polinomios de Hermite

$$\begin{aligned} H_{n+1}(x) &= 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x), \\ H'_n(x) &= 2nH_{n-1}(x). \end{aligned}$$

3. Muestre utilizando el principio de inducción matemática que

$$\left(2x - \frac{d}{dx}\right)^n 1 = H_n(x).$$

4. a) Desarrolle x^{2r} en una serie de polinomios de Hermite de orden par.

b) Desarrolle x^{2r+1} en una serie de polinomios de Hermite de orden impar. En ambos casos $r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

5. Muestre que

$$a) \quad \int_{-\infty}^{\infty} H_n(x) e^{-x^2/2} dx = \begin{cases} \frac{2\pi n!}{\left(\frac{n}{2}\right)!}, & n \text{ par} \\ 0, & n \text{ impar} \end{cases}$$

$$b) \quad \int_{-\infty}^{\infty} x H_n(x) e^{-x^2/2} dx = \begin{cases} 0 & n \text{ par} \\ 2\pi \frac{(n+1)!}{\left(\frac{n+1}{2}\right)!}, & n \text{ impar} \end{cases}$$

6. Muestre que

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^m e^{-x^2} H_n(x) dx = 0, \quad \text{para } m \text{ un entero, } 0 \leq m \leq n-1.$$

7. Muestre que

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-x^2} H_n(x) H_n(x) dx = \sqrt{\pi} 2^n n! \left(n + \frac{1}{2}\right).$$

Esta integral aparece cuando se calcula el promedio del cuadrado del desplazamiento del oscilador cuántico.

8. a) La transición de probabilidad entre dos estados ψ_m y ψ_n del oscilador armónico cuántico, depende de que la integral siguiente vale

$$\int_{-\infty}^{\infty} x e^{-x^2} H_n(x) H_m(x) dx = \sqrt{\pi} 2^{n-1} n! \delta_{m,n-1} + \sqrt{\pi} 2^n (n+1)! \delta_{m,n+1}.$$

Obtenga explícitamente este valor. El resultado muestra que las transiciones sólo pueden ocurrir entre estados cuyos niveles de energía sean adyacentes, $m = n \pm 1$.

b) Muestre también que

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-x^2} H_n(x) H_m(x) dx = \sqrt{\pi} 2^{n-1} (2n+1) n! \delta_{m,n} + \sqrt{\pi} 2^n (n+2)! \delta_{m,n+2} + \sqrt{\pi} 2^{n-2} n! \delta_{m,n-2}.$$

9. Muestre que

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^r e^{-x^2} H_n(x) H_{n+p}(x) dx = \begin{cases} 0, & p > r, \\ 2^n \sqrt{\pi} (n+r)!, & p = r, \end{cases}$$

para números enteros n , p y r no negativos.

10. Con

$$\psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2^n \sqrt{\pi} n!}} e^{-x^2/2} H_n(x),$$

verifique que

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \left(x + \frac{d}{dx}\right) \psi_n(x) = \sqrt{n} \psi_{n-1}(x),$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \left(x - \frac{d}{dx}\right) \psi_n(x) = \sqrt{n+1} \psi_{n+1}(x).$$

11. a) Verifique la identidad entre operadores

$$x - \frac{d}{dx} = -e^{x^2/2} \frac{d}{dx} e^{-x^2/2}.$$

b) Las funciones de onda normalizadas del oscilador armónico son

$$\psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2^n \sqrt{\pi} n!}} e^{-x^2/2} H_n(x).$$

Muestre que es posible escribirlas en la forma

$$\psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2^n \sqrt{\pi} n!}} \left(x - \frac{d}{dx} \right)^n e^{-x^2/2}.$$

7

Polinomios de Laguerre

El último de los diferentes conjuntos de polinomios ortogonales que discutiremos formalmente, son los llamados polinomios de Laguerre.

7.1. Clase 23

7.1.1. Polinomios de Laguerre

Como hemos visto en el capítulo 3, la ecuación diferencial de Laguerre es

$$x \frac{d^2 y(x)}{dx^2} + (1-x) \frac{dy(x)}{dx} + ny(x) = 0, \quad (7.1)$$

y ésta tiene una singularidad regular en $x = 0$. Esta ocasión en vez de resolver la ecuación en detalle, sólo presentamos las fórmulas más relevantes de la solución. De cualquier manera, con todo lo que usted ha aprendido en el curso sobre las soluciones en serie, debe ser capaz de obtener los pasos intermedios sin ningún problema.

Proponiendo una solución en serie alrededor del punto singular regular $x = 0$

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k, \quad (7.2)$$

obtenemos la relación de recurrencia siguiente para los coeficientes consecutivos

$$a_{k+1} = \frac{n-k}{(k+1)^2} a_k, \quad \text{con: } k = 0, 1, 2, \dots \quad (7.3)$$

Note que siempre que n sea un número natural, los coeficientes de todas las potencias y^k con $k > n$ se anulan. Los polinomios de grado n que satisfacen esta relación de recurrencia son los *polinomios de Laguerre* y los denotaremos por $L_n(x)$.

Los polinomios de Laguerre de orden n pueden definirse como sigue

$$L_n(x) = \frac{1}{n!} e^x \frac{d^n}{dx^n} (x^n e^{-x}). \quad (7.4)$$

Si calculamos la derivada explícitamente, podemos escribir los polinomios en la forma equivalente

$$L_n = \frac{(-1)^n}{n!} \left[x^n - \frac{n^2}{1!} x^{n-1} + \frac{n^2(n-1)^2}{2!} x^{n-2} - \dots + (-1)^n n! \right], \quad (7.5)$$

$$= \sum_{m=0}^n (-1)^m \frac{n!}{(n-m)! m! m!} x^m = \sum_{s=0}^n (-1)^{n-s} \frac{n! x^{n-s}}{(n-s)! (n-s)! s!}. \quad (7.6)$$

En la tabla siguiente damos la forma explícita de los primeros polinomios de Laguerre, y también presentamos sus gráficas

n	$L_n(x)$
0	1
1	$-x + 1$
2	$\frac{1}{2!}(x^2 - 4x + 2)$
3	$\frac{1}{3!}(-x^3 + 9x^2 - 18x + 6)$
4	$\frac{1}{4!}(x^4 - 16x^3 + 72x^2 - 96x + 24)$
5	$\frac{1}{5!}(-x^5 + 25x^4 - 200x^3 + 600x^2 - 600x + 120)$
6	$\frac{1}{6!}(x^6 - 36x^5 + 450x^4 - 2400x^3 + 5400x^2 - 4320x + 720)$

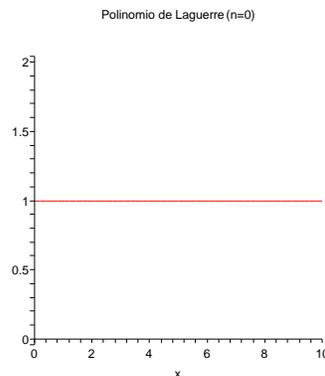
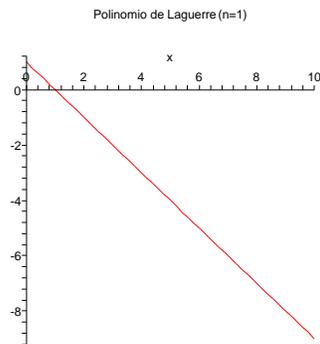
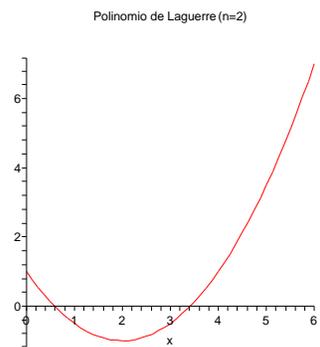
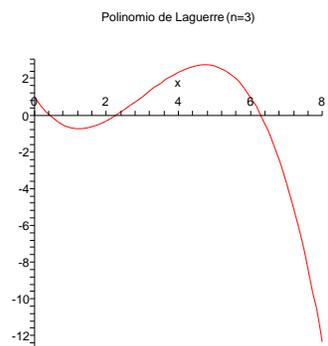
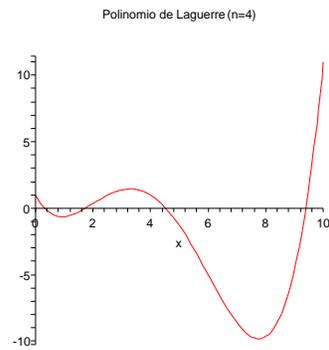
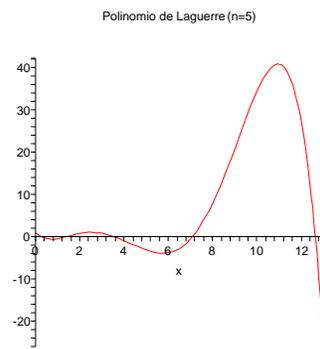
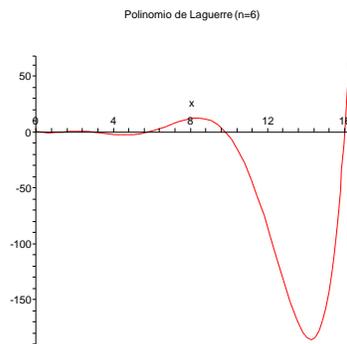


Figura 7.1: Gráfica de $L_0(x)$.

Como se puede observar de la forma de la función generadora (7.17), de la forma de la ecuación diferencial (7.1) o de la tabla, los polinomios de Laguerre no tienen paridad definida, esto es, no son funciones impares ni pares.

Figura 7.2: Gráfica de $L_1(x)$.Figura 7.3: Gráfica de $L_2(x)$.Figura 7.4: Gráfica de $L_3(x)$.

Figura 7.5: Gráfica de $L_4(x)$.Figura 7.6: Gráfica de $L_5(x)$.Figura 7.7: Gráfica de $L_6(x)$.

Recuerde que como hemos desarrollado la solución en serie en torno de un punto singular regular, los polinomios de Laguerre nos dan una de las dos soluciones linealmente independientes de la ecuación (7.1). Para encontrar la otra solución linealmente independiente deben estudiarse las soluciones de la ecuación más general $y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0$.

7.1.2. Relación de ortogonalidad

Como hemos anunciado y como usted podrá suponer, los polinomios de Laguerre son ortogonales, en su intervalo de definición $x \in [0, \infty)$. Sin embargo ellos satisfacen una relación de ortogonalidad parecida a los polinomios de Hermite, en el sentido de que el producto escalar en el que son ortogonales, necesita de una función de peso para que la integral del cuadrado de los polinomios converja, en este caso la función de peso es e^{-x} . De manera explícita la relación de ortogonalidad de los polinomios es

$$\int_0^{\infty} e^{-x} L_n(x) L_m(x) dx = (n!)^2 \delta_{nm}. \quad (7.7)$$

Tenemos así que los polinomios de Laguerre son una base para el espacio de funciones conocido como g_2^{ω} . Donde el espacio g_2^{ω} es el espacio de todas las funciones continuas por tramos en el intervalo $0 \in [0, \infty)$, que pueden expresarse como límites de sucesiones de polinomios de Laguerre.

Note que podemos definir las funciones

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{n!} L_n(x) e^{-x/2}, \quad (7.8)$$

las cuales son ortonormales con respecto al producto escalar ordinario.

$$\int_0^{\infty} \varphi_n(x) \varphi_m(x) dx = \delta_{nm}. \quad (7.9)$$

7.1.3. Relaciones de recurrencia

Para deducir la relación de recurrencia para los polinomios de Laguerre, se razona como sigue. El polinomio $xL_n(x)$ es de grado $n + 1$ y en consecuencia puede expresarse en la forma

$$xL_n(x) = \sum_{k=0}^{n+1} a_k L_k(x), \quad (7.10)$$

donde los coeficientes a_n se determinan como es usual, multiplicando ambos miembros de la ecuación (7.10) por: $e^{-x} L_m$ y utilizando la relación de ortogonalidad (7.7), obteniendo

$$a_k = \frac{1}{(k!)^2} \int_0^{\infty} x e^{-x} L_k(x) L_n(x) dx. \quad (7.11)$$

Pero $(xL_n) \cdot L_k = L_n \cdot (xL_k) = 0$ para toda $k + 1 < n$, ó $k < n - 1$. En consecuencia (7.10) se reduce a

$$xL_n = a_{n-1}L_{n-1} + a_nL_n + a_{n+1}L_{n+1}. \quad (7.12)$$

Igualando los coeficientes de x^{n+1} en ambos miembros de esta ecuación tenemos utilizando (7.5)

$$\frac{(-1)^n}{n!}x^{n+1} = a_{n+1}\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}x^{n+1} \Rightarrow a_{n+1} = -(n+1). \quad (7.13)$$

De manera análoga, igualando los coeficientes de x^n

$$\begin{aligned} -\frac{(-1)^n}{n!}n^2x^n &= a_n\frac{(-1)^n}{n!}x^n + a_{n+1}\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}(n+1)^2x^n \Rightarrow n^2 = -a_n + a_{n+1}(n+1)^2, \\ &\Rightarrow a_n = 2n + 1. \end{aligned} \quad (7.14)$$

y de x^{n-1}

$$\begin{aligned} \frac{(-1)^n}{n!}\frac{n^2(n-1)^2}{2!}x^{n-1} &= \left(\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}a_{n-1} - a_n\frac{(-1)^n}{n!}n^2 + a_{n+1}\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}\frac{(n+1)^2n^2}{2!} \right) x^{n-1} \\ -\frac{n(n-1)^2}{2} &= a_{n-1} + a_n n + a_{n+1}\frac{n(n+1)}{2} \Rightarrow a_{n-1} = -n. \end{aligned} \quad (7.15)$$

Por tanto la ecuación (7.12) se escribe finalmente como la relación de recurrencia siguiente

$$(n+1)L_{n+1}(x) = (2n+1-x)L_n(x) - nL_{n-1}(x), \quad (7.16)$$

la cual es válida para $n \geq 1$. Esta relación también se puede hacer válida para $n = 0$, si se toma: $L_{-1} \equiv 0$.

7.2. Clase 24

7.2.1. Función generadora

En el caso de los polinomios de Laguerre también es posible escribir una función generadora, al igual que sucedió con los polinomios de Legendre, Bessel y Hermite. En este caso tenemos:

Definición 7.2.1 *Función generadora de los polinomios de Laguerre*

$$G(x, r) = \frac{1}{1-r}e^{-rx/(1-r)}. \quad (7.17)$$

Mostremos que en realidad esta función genera los polinomios de Laguerre. El desarrollo en serie de Taylor de G en potencias de r se puede expresar en la forma

$$G(x, r) = \sum_{n=0}^{\infty} L_n(x) r^n, \quad (7.18)$$

donde $L_n(x)$ es una función tan sólo de x . Más aún, esta serie converge uniformemente y absolutamente para toda x y toda r con $|r| > 1$, ya que $G(x, r)$ es el producto de dos funciones cuyas series son así, convergentes. En consecuencia

$$\frac{\partial G}{\partial r} = \sum_{n=1}^{\infty} L_n(x) n r^{n-1}. \quad (7.19)$$

Más aún, por (7.17)

$$(1-r)^2 \frac{\partial G}{\partial r} = (1-x-r)G, \quad (7.20)$$

y por lo tanto se tiene

$$(1-r)^2 \sum_{n=1}^{\infty} L_n(x) n r^{n-1} + (x-1+r) \sum_{n=0}^{\infty} L_n(x) r^n = 0. \quad (7.21)$$

Ahora un cálculo directo revela que

$$(n+1)L_{n+1}(x) = (2n+1-x)L_n(x) - nL_{n-1}(x), \quad (7.22)$$

y ya que $L_0(x) = 1$ y $L_1(x) = x - 1$, concluimos que la función (7.17) genera realmente los polinomios de Laguerre.

7.2.2. Polinomios asociados de Laguerre

En muchas aplicaciones, principalmente en Mecánica Cuántica, necesitamos los polinomios asociados de Laguerre, definidos por

$$L_n^k(x) = (-1)^k \frac{d^k}{dx^k} [L_{n+k}(x)]. \quad (7.23)$$

De la forma de la serie de $L_n(x)$ tenemos

$$\begin{aligned} L_0^k(x) &= 1, \\ L_1^k(x) &= -x + k + 1, \end{aligned} \quad (7.24)$$

$$L_2^k(x) = \frac{x^2}{2} - (k+2)x + \frac{(k+2)(k+1)}{2}. \quad (7.25)$$

De manera general

$$L_n^k(x) = \sum_{m=0}^n (-1)^m \frac{(n+k)!}{(n-m)!(k+m)!m!} x^m, \quad k > -1. \quad (7.26)$$

También podemos desarrollar una función generadora para los polinomios asociados de Laguerre diferenciando k veces la función generadora de los polinomios de Laguerre (7.17)

$$\frac{e^{-xr/(1-r)}}{(1-r)^{k+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n^k(x) r^n, \quad |r| < 1. \quad (7.27)$$

De esta ecuación obtenemos

$$L_n^k(0) = \frac{(n+k)!}{n!k!}. \quad (7.28)$$

Las relaciones de recurrencia se pueden derivar fácilmente de la función generadora, o diferenciando las relaciones de recurrencia de los polinomios de Laguerre. Entre las numerosas posibilidades tenemos

$$(n+1)L_{n+1}^k(x) = (2n+k+1-x)L_n^k(x) - (n+k)L_{n-1}^k(x), \quad (7.29)$$

$$xL_n^{k'}(x) = nL_n^k(x) - (n+k)L_{n-1}^k(x). \quad (7.30)$$

De estas ecuaciones, o diferenciando k veces la ecuación de Laguerre (7.1) se obtiene la ecuación diferencial asociada de Laguerre

$$x \frac{d^2 L_n^k}{dx^2}(x) + (k+1-x) \frac{dL_n^k}{dx}(x) + nL_n^k(x) = 0. \quad (7.31)$$

Una representación de Rodrigues de los polinomios asociados de Laguerre es

$$L_n^k(x) = \frac{e^x x^{-k}}{n!} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x} x^{n+k}). \quad (7.32)$$

Note que todas estas fórmulas para $L_n^k(x)$ se reducen a las expresiones correspondientes para $L_n(x)$ cuando $k=0$.

Los polinomios asociados de Laguerre son ortogonales, con una función de peso $e^{-x} x^k$

$$\int_0^\infty e^{-x} x^k L_n^k(x) L_m^k(x) dx = \frac{(n+k)!}{n!} \delta_{m,n}. \quad (7.33)$$

Una forma equivalente y muy útil de la ecuación asociada de Laguerre se obtiene haciendo el cambio de variable $\psi_n^k(x) = e^{-x/2} x^{(k+1)/2} L_n^k(x)$, con lo cual la ecuación asociada de Laguerre se reescribe como

$$\frac{d^2 \psi_n^k(x)}{dx^2} + \left(-\frac{1}{4} + \frac{2n+k+1}{2x} - \frac{k^2-1}{4x^2} \right) \psi_n^k(x) = 0. \quad (7.34)$$

7.2.3. El átomo de hidrógeno

Tal vez la aplicación más importante de los polinomios de Laguerre en física, es en las soluciones de la ecuación de onda de Schrödinger para el átomo de Hidrógeno. Esta ecuación es

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi - \frac{e^2}{r} \Psi = E\Psi. \quad (7.35)$$

En esta ecuación m es la masa del electrón y $-e$ su carga. Note que el segundo término de la ecuación corresponde al potencial Coulombiano atractivo. Desde luego estamos considerando que el protón (de carga e) está colocado en el origen de coordenadas. Dado que

el potencial sólo depende de la coordenada radial r , es conveniente resolver esta ecuación en un sistema coordenado esférico. en el capítulo 3 hemos visto como escribir el operador laplaciano en éstas coordenadas

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \phi^2}. \quad (7.36)$$

Realizando separación de variables en la ecuación (7.35), tenemos que la ecuación radial resultante es

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR(r)}{dr} \right) - \frac{e^2}{r} R(r) + \frac{\hbar^2}{2m} \frac{l(l+1)}{r^2} R(r) = ER(r). \quad (7.37)$$

Para que las constantes aparezcan de manera más conveniente, es útil redefinir:

$$x = \alpha r, \quad \text{con } \alpha^2 = -\frac{8mE}{\hbar^2}, \quad E < 0, \quad \text{y} \quad \lambda = \frac{2me^2}{\alpha \hbar^2}. \quad (7.38)$$

Y la ecuación radial se reescribe como

$$\frac{1}{x^2} \frac{d}{dx} \left(x^2 \frac{d\chi(x)}{dx} \right) + \left(\frac{\lambda}{x} - \frac{1}{4} - \frac{l(l+1)}{x^2} \right) \chi(x) = 0, \quad (7.39)$$

donde $\chi(x) = R(x/\alpha)$. Comparando esta ecuación con (7.34), obtenemos que la ecuación (7.39) queda resuelta por la función

$$x\chi(x) = e^{-x/2} x^{l+1} L_{\lambda-l-1}^{2l+1}, \quad (7.40)$$

en la cual k se reemplaza por $2l+1$ y n por $\lambda-l-1$.

7.3. Problemas

1. Utilizando la forma explícita de los polinomios de Laguerre, muestre que

$$L'_n(0) = -n, \quad \text{y} \quad L''_n(0) = \frac{1}{2}n(n-1).$$

2. A partir de la función generadora obtenga la representación de Rodrigues de los polinomios asociados de Laguerre

$$L_n^k(x) = \frac{e^x x^{-k}}{n!} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x} x^{n+k}).$$

3. Obtenga la relación de ortogonalidad (7.33) de los polinomios asociados de Laguerre.

4. Desarrolle la función x^r en una serie de polinomios asociados de Laguerre $L_n^k(x)$, con k fija y n tomando los valores de 0 a r (0 a ∞ si r no es un número entero).

5. Desarrolle la función e^{-ax} en una serie de polinomios asociados de Laguerre $L_n^k(x)$, con k fijo y n tomando los valores de 0 a ∞ .

a) Evalúe directamente los coeficientes del desarrollo.

b) Obtenga el mismo resultado, pero esta vez trabajando con la función generadora.

6. Muestre que

$$\int_0^{\infty} e^{-x} x^{k+1} L_n^k(x) L_n^k(x) dx = \frac{(n+k)!}{n!} (2n+k+1).$$

7. La parte radial normalizada de la función de onda del átomo de hidrógeno, es

$$R_{nl}(r) = \left[\alpha^3 \frac{(n-l-1)!}{2n(n+l)!} \right]^{1/2} e^{-\alpha r/2} (\alpha r)^l L_{n-l-1}^{2l+1}(\alpha r),$$

en la cual $\alpha = 2Z/na_0 = 2Zme^2/n\hbar^2$. Evalúe

$$a) \quad \langle r \rangle = \int_0^{\infty} r R_{nl}(\alpha r) R_{nl}(\alpha r) r^2 dr,$$

$$b) \quad \langle r^{-1} \rangle = \int_0^{\infty} r^{-1} R_{nl}(\alpha r) R_{nl}(\alpha r) r^2 dr.$$

Físicamente la cantidad $\langle r \rangle$ es el desplazamiento promedio del electrón referenta al núcleo, mientras que $\langle r^{-1} \rangle$ es el promedio del inverso del desplazamiento.

8

Transformada de Fourier

8.1. Clase 25

8.1.1. Transformadas integrales

Frecuentemente en física uno se encuentra con pares de funciones que se encuentran relacionadas por una expresión de la forma siguiente

$$g(\alpha) = \int_a^b f(t)K(\alpha, t)dt. \quad (8.1)$$

La función $g(\alpha)$ es llamada la transformada integral de $f(t)$ por el núcleo ¹ $K(\alpha, t)$. La operación se puede describir como un mapeo de una función $f(t)$ en el espacio- t a otra función $g(\alpha)$ en el espacio- α . Dos ejemplos de esta interpretación en física son las relaciones entre: el tiempo y la frecuencia en Electrodinámica Clásica y Mecánica Cuántica, y la relación entre el espacio de configuraciones y el espacio de momentos en Mecánica Cuántica.

Existen varios tipos de transformadas integrales que aparecen frecuentemente en física, cada una de ellas está asociada a un núcleo diferente. De entre ellas las diferentes posibilidades podemos mencionar los núcleos siguientes

$$e^{iat}, \quad e^{-\alpha t}, \quad tJ_n(\alpha t), \quad t^{\alpha-1}, \quad (8.2)$$

¹Del inglés Kernel.

los cuales dan origen a

$$g(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{i\alpha t} dt, \quad \text{Transformada de Fourier.} \quad (8.3)$$

$$g(\alpha) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-\alpha t} dt, \quad \text{Transformada de Laplace.} \quad (8.4)$$

$$g(\alpha) = \int_0^{\infty} f(t) t J_n(\alpha t) dt, \quad \text{Transformada de Hankel.} \quad (8.5)$$

$$g(\alpha) = \int_0^{\infty} f(t)t^{\alpha-1} dt, \quad \text{Transformada de Mellin.} \quad (8.6)$$

Claramente el número de tipos posibles de transformadas es ilimitado. Estas transformadas son muy útiles en el análisis matemático y en las aplicaciones físicas. En este curso nos limitaremos al estudio de las dos primeras, esto es, la transformada de Fourier en este capítulo y la transformada de Laplace en el siguiente.

Linealidad

Todas estas transformadas integrales son lineales, esto es, satisfacen las propiedades

$$\int_a^b [c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)] K(\alpha, t) dt = \int_a^b c_1 f_1(t) K(\alpha, t) dt + \int_a^b c_2 f_2(t) K(\alpha, t) dt, \quad (8.7)$$

y

$$\int_a^b c f(t) K(\alpha, t) dt = c \int_a^b f(t) K(\alpha, t) dt, \quad (8.8)$$

donde c_1 y c_2 son constantes y $f_1(t)$ y $f_2(t)$ son funciones para las cuales la operación transformada está definida.

Representando la transformada integral lineal por el operador \mathcal{L} , obtenemos

$$g(\alpha) = \mathcal{L}f(t). \quad (8.9)$$

Uno espera que el operador inverso \mathcal{L}^{-1} exista, de manera tal que

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}g(\alpha). \quad (8.10)$$

En general, el mayor problema en la utilización de las transformadas integrales, es la determinación del operador inverso. Sin embargo, para los dos tipos de transformaciones que estudiaremos, la de Fourier y la de Laplace, obtener el inverso es relativamente sencillo. El lector interesado en las transformadas inversas de Hankel y Mellin puede consultar por ejemplo [9].

Las transformadas integrales tienen muchas aplicaciones especiales en física, algunas de las cuales expondremos en este capítulo y el siguiente.

8.1.2. La transformada de Fourier

En el capítulo 2 hemos visto que podemos representar una función en serie de Fourier, cuando la función tiene las características siguientes

- La función está limitada al intervalo $[0, 2\pi]$, ó $[-L, L]$ (un intervalo finito).
- La función está definida en el intervalo $(-\infty, \infty)$, pero es una función es periódica

¿Qué pasa si tenemos una función *no periódica* en el intervalo infinito $(-\infty, \infty)$?

Existe una representación integral

Veamos: Sabemos que si $f(x)$ es una función continua a pedazos con discontinuidades finitas en el intervalo $[-L, L]$, podemos desarrollarla en serie de Fourier

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right) + b_k \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \right], \quad (8.11)$$

donde:

$$a_k = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \cos\left(\frac{k\pi t}{L}\right) dt \quad y \quad b_k = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \sin\left(\frac{k\pi t}{L}\right) dt. \quad (8.12)$$

Con lo cual podemos reescribir a $f(x)$ como

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(t) dt + \frac{1}{L} \sum_{k=1}^{\infty} \int_{-L}^L f(t) \left[\cos\left(\frac{k\pi t}{L}\right) \cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right) + \sin\left(\frac{k\pi t}{L}\right) \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \right] dt \\ &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(t) dt + \frac{1}{L} \sum_{k=1}^{\infty} \int_{-L}^L f(t) \cos\left(\frac{k\pi t}{L} - \frac{k\pi x}{L}\right) dt \\ &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(t) dt + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \int_{-L}^L f(t) \cos\left(\frac{k\pi}{L}[t - x]\right) dt \\ &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(t) dt + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\pi}{L} F_L\left(\frac{k\pi}{L}\right), \end{aligned} \quad (8.13)$$

donde

$$F_L\left(\frac{k\pi}{L}\right) \equiv \int_{-L}^L f(t) \cos\left(\frac{k\pi}{L}(t - x)\right) dt. \quad (8.14)$$

Claramente el cociente $\frac{k\pi}{L}$ es un número discreto. En el límite cuando $L \rightarrow \infty$, el cociente $\omega_k \equiv \frac{k\pi}{L}$ pasa a ser una variable continua y podemos reescribir la integral (8.14) como

$$F_L(\omega_k) = \int_{-L}^L f(t) \cos(\omega_k(t - x)) dt. \quad (8.15)$$

Analicemos la validez de esta afirmación. Pensemos en la partición de los \mathbb{R}^+ dada por

$$\omega_0 = 0 < \omega_1 = \frac{\pi}{L} < \omega_2 = \frac{2\pi}{L} < \cdots < \omega_k = \frac{k\pi}{L}. \quad (8.16)$$

La longitud de cada intervalo es $\Delta\omega_k = \omega_k - \omega_{k-1} = \frac{\pi}{L} \equiv \Delta\omega$. Note que hemos retirado la etiqueta k en $\Delta\omega$, debido a que esta cantidad es una constante. Esto sugiere que el segundo término de la ecuación (8.13) para $f(x)$ es una suma de Riemann infinita de la función F_L

$$\sum_{k=1}^{\infty} F_L(\omega_k) \Delta\omega_k = \sum_{k=1}^{\infty} F_L(\omega_k) \Delta\omega. \quad (8.17)$$

Note que en el límite $L \rightarrow \infty$, $\Delta\omega = \frac{\pi}{L} \rightarrow 0$. Así en el límite $L \rightarrow \infty$

$$f(x) = \underbrace{\lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(t) dt}_{=0} + \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} F_L(\omega_k) \Delta\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} F(\omega) d\omega, \quad (8.18)$$

con

$$F(\omega) = \lim_{L \rightarrow \infty} F_L(\omega_k) = \lim_{L \rightarrow \infty} \int_{-L}^L f(t) \cos \omega_k(t-x) dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \omega(t-x) dt. \quad (8.19)$$

Obtenemos así finalmente la *integral de Fourier*

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \omega(t-x) dt. \quad (8.20)$$

Este es un resultado formal que se puede demostrar de manera rigurosa.

8.1.3. Forma exponencial de la transformada de Fourier

La integral de Fourier se puede escribir en forma exponencial, para obtener esta representación, reescribamos primero la integral de Fourier en la forma

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \omega(t-x) dt + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \omega(t-x) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \omega(t-x) dt + \frac{1}{2\pi} \int_0^{-\infty} (-d\omega) \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos[-\omega(t-x)] dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \omega(t-x) dt + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^0 d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos[\omega(t-x)] dt, \end{aligned}$$

con lo cual obtenemos

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \omega(t-x) dt. \quad (8.21)$$

Dado que

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \operatorname{sen} \omega(t-x) dt = 0, \quad (8.22)$$

ya que $\sin[-\omega(t-x)] = -\sin \omega(t-x)$ es una función impar y $\int_{-\infty}^{\infty} d\omega \sin[\omega(t-x)] = 0$. Podemos reescribir una vez más la función $f(x)$, ahora en la forma

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \omega(t-x) dt + \frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin \omega(t-x) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) [\cos \omega(t-x) + i \sin \omega(t-x)] dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\omega(t-x)} dt, \end{aligned}$$

o equivalentemente

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} dt \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\omega t} dt. \quad (8.23)$$

Hasta ahora ω es una variable matemática auxiliar. En muchos problemas físicos ω es una frecuencia angular. En este caso podemos interpretar la Integral de Fourier como una representación de $f(x)$ en términos de una distribución de ondas sinusoidales infinitamente largas de frecuencia angular ω en la cual esta frecuencia es una variable continua.

Note que si reescribimos la función $f(x)$ en la forma

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\omega(t-x)} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \underbrace{\left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{i\omega(t-x)} d\omega \right\}}_{\text{debe ser una delta de Dirac}}, \quad (8.24)$$

pero en el capítulo 1, vimos en efecto que una posible secuencia delta es

$$\delta_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-n}^n e^{ixt} dt. \quad (8.25)$$

Lo cual confirma que

$$\delta(t-x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(t-x)} d\omega. \quad (8.26)$$

Mostrándonos la consistencia de la ecuación (8.23).

Definición 8.1.1 *Transformada de Fourier.*

Denotamos la transformada de Fourier de la función $f(t)$ mediante $g(\omega)$, y la definimos como

$$g(\omega) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\omega t} dt. \quad (8.27)$$

Pero hemos mostrado en (8.23) que

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} dt \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\omega t} dt. \quad (8.28)$$

Este resultado nos permite establecer el siguiente teorema

Teorema 8.1.2 *Teorema de inversión.*

$$f(x) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega) e^{-i\omega x} d\omega. \quad (8.29)$$

8.1.4. Transformada de Fourier seno y coseno

Transformada coseno:

Si $f(x)$ es una función par $f(x) = f(-x)$, las transformadas se reescriben de una manera un poco diferente

$$g(\omega) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \underbrace{(\cos(\omega t))}_{par} + i \underbrace{\sin(\omega t)}_{impar} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(\omega t) dt.$$

Para enfatizar el hecho de que la transformada de Fourier de una función par sólo necesita de la función coseno, es usual introducir un subíndice c en las funciones f y g , y a la transformada se le conoce como la transformada coseno

$$g_c(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f_c(t) \cos(\omega t) dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f_c(t) \cos(\omega t) dt. \quad (8.30)$$

Dado que la $f(x)$ es par, la podemos reescribir como $(f(x) + f(-x))/2$ y utilizando la ecuación (8.29) obtenemos

$$f(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega) \frac{e^{-i\omega x} + e^{i\omega x}}{2} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega) \cos(\omega x) d\omega,$$

con lo cual la transformada coseno inversa es

$$f_c(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g_c(\omega) \cos(\omega x) d\omega = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} g_c(\omega) \cos(\omega x) d\omega. \quad (8.31)$$

Transformada seno:

Si $f(x)$ es una función impar $f(x) = -f(-x)$ entonces la transformada seno y la transformada inversa son

$$g_s(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f_s(x) \sin(\omega x) dx. \quad (8.32)$$

$$f_s(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} g_s(\omega) \sin(\omega x) d\omega. \quad (8.33)$$

Ejemplo 8.1.3 *Tren de onda finito.*

Obtengamos la transformada de Fourier de la función siguiente

$$f(t) = \begin{cases} \sin \omega_0 t, & |t| < \frac{N\pi}{\omega_0}, \\ 0 & |t| > \frac{N\pi}{\omega_0}. \end{cases} \quad (8.34)$$

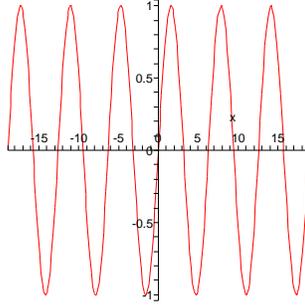


Figura 8.1: La figura muestra un tren de onda finito con valores: $N = 6$ y $\omega_0 = 1$.

Dado que $f(t)$ es una función impar, su transformada de Fourier la podemos encontrar mediante la transformada seno (8.32)

$$\begin{aligned} g_s(\omega) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\frac{N\pi}{\omega_0}} \sin \omega_0 t \sin \omega t dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\frac{N\pi}{\omega_0}} \left[\frac{\cos(\omega_0 - \omega)t - \cos(\omega_0 + \omega)t}{2} \right] dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{\sin[(\omega_0 - \omega)t]}{(\omega_0 - \omega)} - \frac{\sin[(\omega_0 + \omega)t]}{\omega_0 + \omega} \right]_0^{\frac{N\pi}{\omega_0}}. \end{aligned}$$

Con lo cual obtenemos finalmente

$$g_s(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{\sin \left[(\omega_0 - \omega) \frac{N\pi}{\omega_0} \right]}{(\omega_0 - \omega)} - \frac{\sin \left[(\omega_0 + \omega) \frac{N\pi}{\omega_0} \right]}{(\omega_0 + \omega)} \right]. \quad (8.35)$$

Note que para valores de $\omega \approx \omega_0$, la transformada de Fourier se puede simplificar

$$g_s(\omega) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{\sin \left(\frac{\omega_0 - \omega}{\omega_0} N\pi \right)}{\omega_0 - \omega} - \frac{\sin \left(\frac{2\omega_0}{\omega_0} N\pi \right)}{2\omega_0} \right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{N\pi \sin \left(\frac{\omega_0 - \omega}{\omega_0} N\pi \right)}{\frac{\omega_0 - \omega}{\omega_0} N\pi}.$$

Si definimos: $\frac{\omega_0 - \omega}{\omega_0} = \frac{\Delta\omega}{\omega_0}$, obtenemos finalmente

$$g_s(\omega) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{N\pi \sin \left(\frac{\Delta\omega}{\omega_0} N\pi \right)}{\frac{\Delta\omega}{\omega_0} N\pi}. \quad (8.36)$$

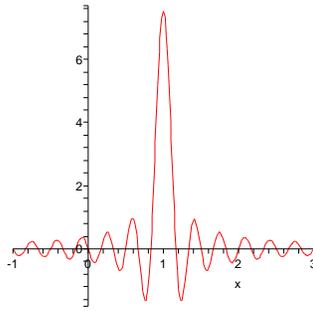


Figura 8.2: La figura muestra la transformada de Fourier seno, del tren de onda finito (8.34) con: $N = 6$ y $\omega_0 = 1$. Note que el pico de la función se encuentra en ω_0 .

Esta función tiene ceros en $\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \pm\frac{1}{N}, \pm\frac{2}{N}, \dots$, etc.

¿Qué tan ancho es este pico? Dado que las contribuciones fuera del máximo central son pequeñas, podemos tomar $\Delta\omega \approx \frac{\omega_0}{N}$.

Note que si N es grande la función es picuda y si N es chica es gorda.

8.2. Clase 26

8.2.1. Flacas versus gordas

Es difícil pensar en configuraciones de partículas que simulen un comportamiento ondulatorio (por este motivo los experimentos de difracción de Fresnel y Young llevaron a la aceptación unánime de la teoría ondulatoria de la luz). Pero por otro lado, es posible imaginar configuraciones de ondas que estén muy “localizada”, esta idea nos lleva al concepto de paquetes de onda.

En física un *paquete de ondas* es una superposición lineal de ondas que toma la forma de un pulso, que se desplaza de modo relativamente compacta en el espacio antes de dispersarse.

En particular en Mecánica Cuántica los paquetes de onda tienen una importancia especial, porque representan partículas materiales localizadas viajando por el espacio. Como discutimos en la sección 3.1.3, la ecuación fundamental de la Mecánica Cuántica es la ecuación de Schrödinger, y es ésta ecuación la que describe la evolución de dichos paquetes. Así los paquetes considerados en Mecánica Cuántica son soluciones de la ecuación de Schrödinger, siendo la amplitud de onda de dichos paquetes diferentes de cero sólo en la zona del espacio donde en cada instante es probable encontrar a la partícula.

La herramienta matemática que se necesita para trabajar con los paquetes de onda son las integrales de Fourier. Nuestro objetivo es estudiar una propiedad muy importante que existe entre el ancho de una paquete de onda y el ancho su transformada de Fourier. No mostraremos este resultado en general, pero lo ilustraremos con un ejemplo.

Los paquetes de onda son de la forma

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(k) e^{ikx} dk.$$

Estos se llaman paquetes de onda, porque en Mecánica Cuántica las funciones e^{ikx} , tienen la interpretación de ondas planas. La longitud de onda de las ondas planas es $\lambda = \frac{2\pi}{k}$, ya que para una k dada, la onda se reproduce así misma cuando cambia de $x \rightarrow x + \frac{2\pi}{k}$

$$e^{ikx} = \cos kx + i \sin kx \rightarrow \begin{cases} \cos k \left(x + \frac{2\pi}{k} \right) = \cos(kx + 2\pi) = \cos kx \\ \sin k \left(x + \frac{2\pi}{k} \right) = \sin(kx + 2\pi) = \sin kx \end{cases}$$

Ejemplo 8.2.1 Consideremos como ejemplo el paquete de ondas planas cuya amplitud $g(k)$ está dada por la función

$$g(k) = e^{-\alpha(k-k_0)^2}. \quad (8.37)$$

En esta función el parámetro α mide que tan rápido cae la función exponencial. Para α grandes la gráfica es muy picuda, mientras que para α chicas es muy ancha. Note que

$$g(k_0) = 1, \quad y \quad \lim_{k \rightarrow \pm\infty} g(k) = 0. \quad (8.38)$$

Concluimos entonces que la contribución de ondas planas con longitud de onda λ pequeñas (k grandes) al paquete de ondas (8.2.1) es nula y la que más contribuye es la onda con $\lambda = \frac{2\pi}{k_0}$.

La transformada de Fourier de la función $g(k)$ es

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(k) e^{ikx} dk = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha(k-k_0)^2} e^{ikx} dk.$$

Haciendo el cambio de variable: $k' = k - k_0 \Rightarrow dk' = dk$, obtenemos

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\alpha k'^2} e^{i(k_0+k')x} dk' = e^{ik_0x} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha k'^2} e^{ik'x} dk' = e^{ik_0x} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha k'^2 + ik'x} dk'.$$

Completando el cuadrado en la última integral

$$-\alpha k'^2 + ik'x = -\alpha \left(k'^2 - 2k' \left(\frac{ix}{2\alpha} \right) \right) = -\alpha \left[\left(k' - \frac{ix}{2\alpha} \right)^2 + \frac{x^2}{4\alpha^2} \right],$$

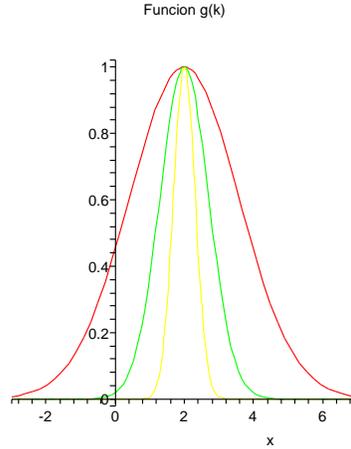


Figura 8.3: La figura muestra la gráfica de la función gaussiana (8.37) para tres valores diferentes del parámetro α . La línea roja es para $\alpha = 1/5$, la verde para $\alpha = 1$ y la línea amarilla para $\alpha = 5$. Note que la figura es más ancha, para valores pequeños del parámetro α y más angosta para valores grandes de α .

obtenemos

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{ik_0x} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha(k' - \frac{ix}{2\alpha})^2} e^{-\frac{x^2}{4\alpha}} dk' = e^{ik_0x} e^{-\frac{x^2}{4\alpha}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha(k' - \frac{ix}{2\alpha})^2} dk' \\ &= e^{ik_0x} e^{-\frac{x^2}{4\alpha}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha y^2} dy = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{ik_0x} e^{-\frac{x^2}{4\alpha}}, \end{aligned} \quad (8.39)$$

donde en la última integral hemos utilizado el resultado $\int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-\alpha y^2} = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$.

Dado que el factor e^{ik_0x} es un factor de fase

$$|e^{ik_0x}|^2 = e^{ik_0x} e^{-ik_0x} = 1, \quad (8.42)$$

²El cálculo de la integral va como sigue. Si definimos $I \equiv \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha y^2} dy$, entonces

$$\begin{aligned} I^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha y^2} dy \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha(x^2+y^2)} dx dy = \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} r e^{-\alpha r^2} d\theta dr \\ &= 2\pi \int_0^{\infty} r e^{-\alpha r^2} dr = -2\pi \int_0^{\infty} \frac{du}{2\alpha} e^u, \end{aligned}$$

donde hemos hecho el cambio de variable $u = -\alpha r^2 \Rightarrow du = -2\alpha r dr$. Así

$$I^2 = \frac{\pi}{\alpha} \int_{-\infty}^0 e^u du = \frac{\pi}{\alpha} e^u \Big|_{-\infty}^0 = \frac{\pi}{\alpha} (1 - e^{-\infty}) = \frac{\pi}{\alpha}, \quad (8.40)$$

de donde concluimos

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-\alpha y^2} = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}. \quad (8.41)$$

y la cantidad que es físicamente relevante es $|f(x)|^2$, entonces

$$|f(x)|^2 = \frac{\pi}{\alpha} e^{-\frac{x^2}{2\alpha}}. \quad (8.43)$$

Note que el único parámetro en $|f(x)|^2$ es α , por tanto detalleemos un poco más el comportamiento de las gráficas $g(k)$ y $f(x)$ respecto a este parámetro. Dado que $f(x)$ es una función compleja si deseamos ver su comportamiento gráfico, graficaremos la parte real de ésta.

Comencemos analizando la función

$$g(k) = e^{-\alpha(k-k_0)^2}.$$

- Esta función tiene un pico en $k = k_0$.
- El pico es más pronunciado cuando α es grande.

Una buena medida del “ancho” de la gráfica es calcular el valor de k para el cual la gráfica cae una fracción: $\frac{1}{e}$ de su valor máximo

$$\frac{1}{e} = e^{-\alpha(k-k_0)^2} \quad (8.44)$$

Si

$$k - k_0 = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}, \quad \text{entonces,} \quad e^{-\alpha(k-k_0)^2} = e^{-1}. \quad (8.45)$$

Así el “ancho” de la gráfica es: $\Delta k \equiv k - k_0 = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}$ y concluimos que:

- El ancho de la gráfica crece cuando α decrece,
- El ancho de la gráfica decrece cuando α crece.

Analícemos ahora la parte real de $f(x)$

$$f(x) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{ik_0x} e^{-\frac{x^2}{4\alpha}}.$$

- Esta función está localizada alrededor de $x = 0$.
- Esta localización es más pronunciada cuando α es pequeña.

Calculemos el “ancho” de la gráfica, calculando el valor de x , para el cual la envolvente a disminuido una fracción $\frac{1}{e}$. Como $f(x=0) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$, el valor x buscado, satisface

$$f(x) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-\frac{x^2}{4\alpha}} = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \frac{1}{e} \Rightarrow x = 2\sqrt{\alpha}. \quad (8.46)$$

Así

$$\Delta x \equiv x - 0 = 2\sqrt{\alpha}. \quad (8.47)$$

Concluimos entonces que:

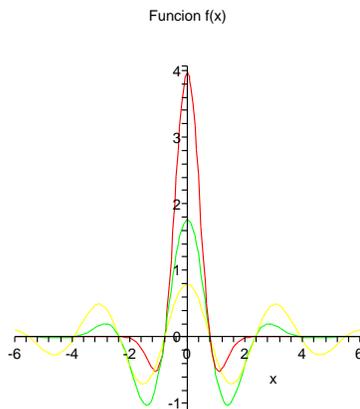


Figura 8.4: La figura muestra la gráfica de la parte real de la transformada de Fourier $f(x)$ (8.39), para tres valores diferentes del parámetro α . La línea roja es para $\alpha = 1/5$, la verde para $\alpha = 1$ y la línea amarilla para $\alpha = 5$. Note que la figura es más ancha, para valores grandes del parámetro α y más angosta para valores pequeños de α .

- *El ancho de la gráfica crece cuando α crece.*
- *El ancho de la gráfica decrece cuando α decrece.*

Existe una reciprocidad aquí ¡una función fuertemente localizada en x es ancha en k y viceversa!

Note que el producto de los “anchos” es

$$\Delta k \Delta x = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} 2\sqrt{\alpha} = 2.$$

Este valor por ahora no importa, lo importante es que no depende del parámetro α .

La propiedad sobre los anchos de las funciones es una propiedad general de las funciones que son transformadas de Fourier una de la otra. Como es una propiedad general, la representaremos por la fórmula

$$\Delta x \Delta k \geq O(1)$$

Esto implica que es imposible tener Δx y Δk pequeñas (característica general de los paquetes de onda, la cual tiene implicaciones físicas muy importantes). En Mecánica Cuántica esta propiedad es conocida como el Principio de incertidumbre de Heisenberg.

8.2.2. Transformada de Fourier de las derivadas

Hemos visto que la transformada de Fourier de $f(x)$ es

$$g(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\omega x} dx \quad (8.48)$$

¿Cuál es la transformada de Fourier de su derivada? Como $\frac{df(x)}{dx}$ es una función de x , su transformada de Fourier es

$$g_1(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{df(x)}{dx} e^{i\omega x} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{d}{dx} (f(x)e^{i\omega x}) - i\omega f(x)e^{i\omega x} \right] dx, \quad (8.49)$$

donde hemos realizado una integral por partes. Evalaundo explícitamente la primer integral tenemos

$$g_1(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} f(x)e^{i\omega x} \Big|_{-\infty}^{\infty} - i\omega \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\omega x} dx. \quad (8.50)$$

Si $f(x)$ se anula cuando $x \rightarrow \pm\infty$, entonces

$$g_1(\omega) = -i\omega g(\omega). \quad (8.51)$$

Esto es, la transformada de Fourier de la derivada es $(-i\omega)$ veces la transformada de Fourier la función original. Podemos generalizar fácilmente este resultado para la n -ésima derivada, obteniendo

$$g_n(\omega) = (-i\omega)^n g(\omega), \quad \text{o,} \quad (8.52)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^n f(x)}{dx^n} e^{i\omega x} dx = (-i\omega)^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\omega x} dx. \quad (8.53)$$

Ejemplo 8.2.2 Ecuación de onda.

Podemos utilizar la técnica de la transformada de Fourier para resolver ecuaciones diferenciales parciales. Para ilustrar esta técnica, resolvamos la ecuación de onda

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}. \quad (8.54)$$

Supongamos que: $y = f(x)$, a $t = 0$. Aplicando la transformada de Fourier, lo cual significa multiplicar la ecuación por $e^{i\omega x}$ e integrar sobre x , obtenemos

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^2 y}{dx^2} e^{i\omega x} dx &= \frac{1}{v^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} e^{i\omega x} dx, \\ \Rightarrow (-i\omega)^2 \int_{-\infty}^{\infty} y(x, t) e^{i\omega x} dx &= \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_{-\infty}^{\infty} y(x, t) e^{i\omega x} dx. \end{aligned}$$

Si definimos

$$Y(\omega, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} y(x, t) e^{i\omega x} dx, \quad (8.55)$$

tenemos entonces la ecuación

$$(-i\omega)^2 Y(\omega, t) = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 Y(\omega, t)}{dt^2}, \quad \text{Ecuación diferencial ordinaria.} \quad (8.56)$$

De hecho tenemos

$$\frac{\partial^2 Y(\omega, t)}{\partial t^2} + v^2 \omega^2 Y(\omega, t) = 0 \quad \text{ecuación de un oscilador lineal.} \quad (8.57)$$

Ecuación diferencial Transformada de Fourier Ecuación diferencial
parcial → **Ordinaria**

Debemos ahora resolver esta ecuación sujeta a la condición de frontera $y(x, t = 0) = f(x)$ o equivalente

$$Y(\omega, t = 0) \equiv F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\omega x} dx. \quad (8.58)$$

La solución general de la ecuación es

$$Y(\omega, t) = A(\omega) e^{\pm i v \omega t}. \quad (8.59)$$

Como

$$Y(\omega, t = 0) = F(\omega) = A(\omega) \Rightarrow A(\omega) = F(\omega), \quad (8.60)$$

y por tanto

$$Y(\omega, t) = F(\omega) e^{\pm i v \omega t}. \quad (8.61)$$

Utilizando la transformada inversa obtenemos

$$\begin{aligned} y(x, t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} Y(\omega, t) e^{-i\omega x} d\omega = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{-i\omega(x \mp vt)} d\omega \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{i\omega y} dy e^{-i\omega(x \mp vt)} d\omega \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(y) dy \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(y-x \pm vt)} d\omega}_{\delta(y-x \pm vt)} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \delta(y - (x \mp vt)) dy = f(x \mp vt). \end{aligned}$$

Por lo tanto la solución es

$$y(x, t) = f(x \mp vt), \quad (8.62)$$

que corresponda a ondas avanzando en la dirección $+x$ y $-x$ respectivamente. La combinación lineal particular de ondas está dada por la condición de frontera $y = f(x)$ y alguna condición tal como la restricción sobre $\partial y / \partial t$.

8.2.3. Teorema de Convolución

Consideremos 2 funciones $f(x)$ y $g(x)$ con transformadas de Fourier $F(t)$ y $G(t)$ respectivamente

$$F(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{itx} dx, \quad y \quad G(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(x)e^{itx} dx. \quad (8.63)$$

Definición 8.2.3 Definimos la “convolución”³ de las funciones f y g sobre el intervalo $(-\infty, \infty)$ como la operación

$$f * g \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(y)f(x-y) dy. \quad (8.64)$$

¿Cuál es la transformada de Fourier de esta relación?

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} g(y)f(x-y) dy &= \int_{-\infty}^{\infty} g(y) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(t)e^{-it(x-y)} dt dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} F(t)e^{-itx} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(y)e^{ity} dy dt = \int_{-\infty}^{\infty} F(t)e^{-itx} G(t) dt \\ \therefore f * g &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(y)f(x-y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} F(t)G(t)e^{-itx} dt. \end{aligned} \quad (8.65)$$

Esto es, la transformada de Fourier inversa de un producto de transformadas de Fourier, es la convolución de las funciones originales: $f * g$. Para el caso particular $x = 0$ tenemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(t)G(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(-y)g(y) dy \quad (8.66)$$

8.3. Clase 27

8.3.1. Relación de Parseval

Teorema 8.3.1 *Teorema de Parseval.*

Dadas dos funciones f y g y sus respectivas transformadas de Fourier F y G , satisfacen

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(w)G^*(w) dw = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g^*(t) dt \quad (8.67)$$

³El término convolución viene de la palabra en alemán: faltung \rightarrow plegable.

La demostración es como sigue

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)G^*(\omega) d\omega &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{i\omega t} dt \right] \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(s)e^{i\omega s} ds \right]^* d\omega \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dt ds f(t)g^*(s) \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(t-s)} d\omega \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g^*(s)\delta(t-s) dt ds = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g^*(t) dt.
 \end{aligned}$$

Note que en particular

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt. \quad (8.68)$$

8.3.2. Fórmula de suma de Poisson

Veamos una propiedad adicional de las transformadas de Fourier, la fórmula de suma de Poisson. Esta nos dice que: si $F(k)$ es la transformada de Fourier de $f(x)$, entonces

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nz) = \frac{\sqrt{2\pi}}{z} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F\left(\frac{2\pi n}{z}\right). \quad (8.69)$$

Mostremos esta relación

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nz) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(k)e^{-ik(nz)} dk = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(k) \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-iknz} dk. \quad (8.70)$$

Cuando la variable x es tal que $-\pi \leq x \leq \pi$, la serie de Fourier de la función $\delta(x)$ es

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{inx}, \quad -\pi \leq x \leq \pi. \quad (8.71)$$

Dado que e^{inx} es una función periódica en x , con periodo 2π , debe suceder que cuando $x \in (-\infty, \infty)$, esta función debe repetirse a intervalos de 2π

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{inx} = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - 2\pi n). \quad (8.72)$$

Introduciendo esta expresión en (8.70) obtenemos

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nz) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(k) \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2\pi \delta(kz - 2\pi n) F(k) dk.$$

Realizando el cambio de variable $k \rightarrow k' = zk \Rightarrow dk' = zdk$, se tiene

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nz) &= \sqrt{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk'}{z} F\left(\frac{k'}{z}\right) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(k' - 2\pi n) \\ &= \frac{\sqrt{2\pi}}{z} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F\left(\frac{k'}{z}\right) \delta(k' - 2\pi n) dk', \end{aligned}$$

obteniendo finalmente

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nz) = \frac{\sqrt{2\pi}}{z} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F\left(\frac{2\pi n}{z}\right). \quad (8.73)$$

Ejemplo 8.3.2 Si $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ su transformada de Fourier está dada por

$$F(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} e^{ikx} dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-|k|} \quad (8.74)$$

Aplicando la fórmula de suma de Poisson (8.69) tenemos

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nz) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+n^2z^2} = \frac{\sqrt{2\pi}}{z} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-|2\pi n/z|} = \frac{\pi}{z} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-2\pi|n/z|} \\ &= \frac{\pi}{z} \left[\sum_{n=-\infty}^{-1} e^{2\pi\frac{n}{z}} + \sum_{n=0}^{\infty} e^{-2\pi\frac{n}{z}} \right] = \frac{\pi}{z} \left[\sum_{n=1}^{-\infty} \left(e^{-\frac{2\pi}{z}}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \left(e^{-\frac{2\pi}{z}}\right)^n \right] \\ &= \frac{\pi}{z} \left[2 \sum_{n=0}^{\infty} \left(e^{-\frac{2\pi}{z}}\right)^n - 1 \right] = \frac{\pi}{z} \left[2 \frac{1}{1 - e^{-\frac{2\pi}{z}}} - 1 \right], \end{aligned}$$

donde en la última igualdad hemos utilizado la serie geométrica discutida en el ejemplo 1.1.3, con $r = e^{-\frac{2\pi}{z}}$. Reescribiendo el resultado en términos de funciones hiperbólicas se tiene

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+n^2z^2} &= \frac{\pi}{z} \left[\frac{2 - (1 - e^{-\frac{2\pi}{z}})}{1 - e^{-\frac{2\pi}{z}}} \right] = \frac{\pi}{z} \left[\frac{1 + e^{-\frac{2\pi}{z}}}{1 - e^{-\frac{2\pi}{z}}} \right] \\ &= \frac{\pi}{z} \frac{e^{-\frac{\pi}{z}}}{e^{-\frac{\pi}{z}}} \left[\frac{e^{\frac{\pi}{z}} + e^{-\frac{\pi}{z}}}{e^{\frac{\pi}{z}} - e^{-\frac{\pi}{z}}} \right] = \frac{\pi}{z} \left[\frac{\cosh \frac{\pi}{z}}{\sinh \frac{\pi}{z}} \right] = \frac{\pi}{z} \coth \left(\frac{\pi}{z} \right). \end{aligned}$$

De donde concluimos que la suma infinita es

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+n^2z^2} = \frac{\pi}{z} \coth \left(\frac{\pi}{z} \right). \quad (8.75)$$

Ejemplo 8.3.3 En el estudio de los operadores diferenciales tales como el operador de Laplace ∇^2 , algunas veces es necesario estudiar la distribución de valores propios λ_n , definidos por la ecuación de valores propios

$$-\nabla^2\Psi_n = \lambda_n\Psi_n. \quad (8.76)$$

Esto se puede hacer estudiado lo que se conoce como el Kernel del calor

$$\Theta(t) \equiv \sum_n d_n e^{-\pi t \lambda_n}, \quad (8.77)$$

donde d_n es la degeneración del valor propio de λ_n .

Claramente si conocemos $\Theta(t)$ para todo valor de t , entonces esta función tiene mucha información acerca de los valores y degeneraciones de los valores propios. De particular importancia es conocer como se comporta $\Theta(t)$ para valores muy pequeños de t , dado que esto da información acerca de la distribución límite de los valores propios para λ_n grande.

Consideremos el siguiente ejemplo, cuando nos fijamos en el operador laplaciano en 1D sobre el círculo unitario ($\nabla^2 = \frac{d^2}{dx^2}$). La ecuación diferencial de Helmholtz es en este caso

$$-\frac{d^2\Psi}{dx^2} = \lambda\Psi, \quad (8.78)$$

la cual tiene funciones propias y valores propios (ver capítulo 3)

$$\Psi_n = e^{inx} \quad y \quad \lambda = n^2. \quad (8.79)$$

Así, el kernel de calor asociado es

$$\theta(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi t n^2}. \quad (8.80)$$

Si consideramos una función $f(x)$ de la forma

$$f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}. \quad (8.81)$$

Entonces el kernel de calor asociado $\theta(t)$ satisface

$$\theta(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nz) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{n^2 z^2}{2}} \quad \text{con} \quad z^2 = 2\pi t \quad \Rightarrow \quad z = \sqrt{2\pi t}. \quad (8.82)$$

Pero la transformada de Fourier de $e^{-\frac{x^2}{2}}$ es $e^{-\frac{k^2}{2}}$

$$\begin{aligned} F(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} e^{ikx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-ik^2)}{2}} e^{-\frac{k^2}{2}} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} e^{-\frac{k^2}{2}} dy = e^{-\frac{k^2}{2}}, \end{aligned}$$

con lo cual concluimos que

$$F\left(\frac{2\pi n}{z}\right) = e^{-\frac{2\pi^2 n^2}{z^2}} = e^{-\frac{\pi n^2}{t}}. \quad (8.83)$$

Tenemos entonces que

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi n^2 t} = \frac{1}{\sqrt{t}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\pi n^2}{t}}, \quad (8.84)$$

de donde el kernel de calor satisface

$$\theta(t) = \frac{1}{\sqrt{t}} \theta\left(\frac{1}{t}\right). \quad (8.85)$$

Tenemos así una relación remarcable para el comportamiento de $\theta(t)$ para t grandes y t pequeñas

$$\theta(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi n^2 t} = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2 t}. \quad (8.86)$$

De esta relación obtenemos para $t \ll 1$ que

$$\theta(t) \approx 1, \quad t \ll 1. \quad (8.87)$$

Y de la relación

$$\theta(t) = \frac{1}{\sqrt{t}} \theta\left(\frac{1}{t}\right), \quad (8.88)$$

tenemos que en el régimen: $t \gg 1$

$$\theta(t) \approx \frac{1}{\sqrt{t}} \lim_{t \rightarrow \infty} \theta\left(\frac{1}{t}\right). \quad (8.89)$$

Por lo tanto concluimos que

$$\theta(t) \approx \frac{1}{\sqrt{t}}, \quad t \gg 1. \quad (8.90)$$

8.4. Problemas

1. Las transformadas de Fourier de dos variables son

$$\begin{aligned} F(u, v) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{i(ux+vy)} dx dy, \\ f(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(u, v) e^{-i(ux+vy)} du dv. \end{aligned}$$

Utilizando $f(x, y) = f([x^2 + y^2]^{1/2})$, muestre que la transformada de Hankel de orden cero es

$$\begin{aligned} F(\rho) &= \int_0^\infty r f(r) J_0(\rho r) dr, \\ f(r) &= \int_0^\infty \rho F(\rho) J_0(\rho r) d\rho, \end{aligned}$$

son caso especiales de las transformadas de Fourier.

2. Suponiendo la validez de las transformada inversa de Hankel, transforme el par de ecuaciones

$$\begin{aligned} g(\alpha) &= \int_0^\infty f(t) J_n(\alpha t) t dt, \\ f(t) &= \int_0^\infty g(\alpha) J_n(\alpha t) \alpha d\alpha, \end{aligned}$$

muestre que la función delta de Dirac tiene una representación integral

$$\delta(t - t') = t \int_0^\infty J_n(\alpha t) J_n(\alpha t') \alpha d\alpha.$$

Esta expresión es de mucha utilidad cuando se desarrolla la función de Green en coordenadas cilíndricas, donde las funciones propias son funciones de Bessel.

3. A partir de la transformada de Fourier en forma exponencial, muestre que el cambio de variables

$$t \rightarrow \ln x, \quad y \quad i\omega \rightarrow \alpha - \gamma,$$

lleva a

$$G(\alpha) = \int_0^\infty F(x) x^{\alpha-1} dx, \quad y \quad F(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} G(\alpha) x^{-\alpha} d\alpha.$$

Estas son las transformadas de Mellin.

4. Si $F(\omega)$ es la transformada de Fourier exponencial de la función $f(x)$ y $G(\omega)$ la transformada de Fourier de $g(x) = f(x + a)$. Muestre que

$$G(\omega) = e^{-i\alpha\omega} F(\omega).$$

5. Considere la función escalón finita y simétrica siguiente

$$f(x) = \begin{cases} 1, & |x| < 1, \\ 0, & |x| > 1. \end{cases}$$

a) Encuentre la transformada de Fourier coseno $g_c(\omega)$ de la función $f(x)$.

b) Considerando la transformada coseno inversa, muestre que

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin \omega \cos \omega x}{\omega} d\omega.$$

c) A partir del inciso anterior muestre que

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin \omega \cos \omega x}{\omega} d\omega = \begin{cases} 0, & |x| > 1, \\ \frac{\pi}{4}, & |x| = 1, \\ \frac{\pi}{2}, & |x| < 1. \end{cases}$$

6. a) Muestre que la transformada de Fourier seno y coseno de la función e^{-at} , está dada por

$$g_s(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\omega}{\omega^2 + a^2}, \quad y \quad g_c(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a}{\omega^2 + a^2},$$

respectivamente.

b) Muestre que

$$\int_0^{\infty} \frac{\omega \sin \omega x}{\omega^2 + a^2} d\omega = \frac{\pi}{2} e^{-ax}, \quad y \quad \int_0^{\infty} \frac{\cos \omega x}{\omega^2 + a^2} d\omega = \frac{\pi}{2a} e^{-ax}.$$

En ambos casos, $x > 0$.

c) Utilizando la relación de Parseval evalúe las siguientes integrales

$$\int_0^{\infty} \frac{d\omega}{(\omega^2 + a^2)^2}, \quad y \quad \int_0^{\infty} \frac{\omega^2 d\omega}{(\omega^2 + a^2)^2}.$$

7. a) Encuentre la transformada de Fourier del pulso triangular

$$f(x) = \begin{cases} h(1 - |a|x) & |x| < \frac{1}{a}, \\ 0 & |x| > \frac{1}{a}. \end{cases}$$

Note que esta función nos da otra sucesión para la función delta, cuando $h = a$ y $a \rightarrow \infty$.

b) Utilizando la sucesión

$$\delta_n = \frac{n}{\sqrt{\pi}} e^{-n^2 x^2},$$

muestre que

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} dk.$$

Nota: Recuerde que $\delta(x)$ está definida en términos de su comportamiento como parte de un integrando.

8. Muestre que

$$\frac{\hbar}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\omega t} d\omega}{E_0 - i\Gamma/2 - \hbar\omega} = \begin{cases} e^{-\Gamma t/2\hbar} e^{-iE_0 t/\hbar} & t < 0, \\ 0 & t > 0. \end{cases}$$

Esta integral de Fourier aparece en varios problemas de Mecánica Cuántica: Dispersión, teoría de perturbaciones dependiente del tiempo, etc.

9. La ecuación de difusión de neutrones con fuente, en 1-dimensión es

$$-D \frac{d^2 \varphi(x)}{dx^2} + K^2 D \varphi(x) = Q \delta(x),$$

donde $\varphi(x)$ es el flujo de neutrones, $Q\delta(x)$ es la fuente en $x = 0$ y D y K^2 son constantes. Aplique la transformada de Fourier a esta ecuación y resuélvala en el espacio transformado. Transforme la solución nuevamente al espacio x y muestre que tiene la forma

$$\varphi(x) = \frac{Q}{2KD} e^{-|Kx|}.$$

10. Un pulso rectangular está descrito por

$$f(x) = \begin{cases} 1, & |x| < a, \\ 0, & |x| > a. \end{cases}$$

a) Muestre que la transformada de Fourier exponencial es

$$F(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin at}{t}.$$

Este es el problema de difracción para un slit, en la óptica física. El slit está descrito por $f(x)$. La amplitud del patrón de difracción está descrito por la transformada de Fourier $F(t)$.

b) Utilice la relación de Parseval para evaluar

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2} dt.$$

11. La función $f(\mathbf{r})$ tiene transformada de Fourier exponencial

$$g(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int f(\mathbf{r}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d^3x = \frac{1}{(2\pi)^{3/2} k^2}.$$

Determine $f(\mathbf{r})$.

Ayuda: Utilice coordenadas esféricas en el espacio k .

9

Transformada de Laplace

9.1. Clase 28

9.1.1. Definición de la transformada de Laplace

En la transformada de Fourier de una función $f(x)$

$$F(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ikx} dx, \quad (9.1)$$

pedimos que $f(x)$ obedeciera la condición

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) \rightarrow 0. \quad (9.2)$$

De hecho dado que hemos adoptado el principio de que las funciones delta son “funciones” aceptables, podemos ser un poco más tolerantes. Por ejemplo, diríamos que la función constante $f(x) = 1$, tiene una transformada de Fourier válida $F(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} dx = \sqrt{2\pi}\delta(k)$.

De manera más general, $f(x)$ puede ser una función seno, o una función coseno o una exponencial compleja. Por ejemplo, si $f(x) = \cos x$, tenemos $F(k) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}(\delta(k-1) + \delta(k+1))$, ya que $\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$ y por lo tanto

$$\begin{aligned} F(k) &= \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (e^{ix} + e^{-ix})e^{-ikx} dx = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (e^{-i(k-1)x} + e^{-i(k+1)x}) dx \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{2}}(\delta(k-1) + \delta(k+1)). \end{aligned}$$

Sin embargo, no podemos considerar funciones $f(x)$ que tengan algún comportamiento divergente para $|x|$ grande. La transformada de Laplace es una modificación del concepto de la transformada de Fourier que nos permite considerar tales tipos de comportamiento divergente para $f(x)$. La transformada de Laplace $f(s)$, ó \mathcal{L} de una función $F(t)$ se define como

$$f(s) = \mathcal{L}\{F(t)\} = \lim_{a \rightarrow \infty} \int_0^a e^{-st} F(t) dt. \quad (9.3)$$

Es claro que esta integral estará bien definida para $s > 0$, aún si $f(x)$ tiene una divergencia de ley de potencias: $f(x) \sim x^m$ cuando $x \rightarrow \infty$, para cualquier constante m arbitrariamente grande. Aún si $f(x)$ diverge exponencialmente: $f(x) \sim e^{ax}$, la integral seguirá estando bien definida si se satisface $s > a$.

Estas propiedades pueden expresarse de una manera diferente de la siguiente manera. No es necesario que la integral infinita de $F(t)$ exista

$$\int_0^{\infty} F(t) dt \quad \text{puede no existir.} \quad (9.4)$$

Como hemos dicho, $F(t)$ puede diverger exponencialmente para $t \rightarrow \infty$. Sin embargo si existe alguna constante s_0 tal que

$$|e^{-s_0 t} F(t)| \leq M, \quad (9.5)$$

donde M es una constante positiva para un t suficientemente grande ($t > t_0$), la transformada de Laplace existirá para $s > s_0$ y se dice que $F(t)$ es de orden exponencial.

Ejemplo 9.1.1 *Contraejemplo:*

Sea $F(t) = e^{t^2}$, como esta función no es de orden exponencial $\mathcal{L}\{F(t)\} = \nexists$.

La transformada de Laplace también puede no estar definida debido a una singularidad suficientemente fuerte en la función $F(t)$ cuando $t \rightarrow 0$.

Ejemplo 9.1.2 *Por ejemplo:* $f(t) = t^n$ $n \leq -1$ diverge para $t \rightarrow 0$ por lo tanto $\mathcal{L}\{t^n\} = \nexists$ para $n \leq -1$.

Transformada de Laplace de funciones elementales (En todos los casos asumimos que $F(t) = 0$ para $s > 0$)

- $F(t) = 1$ con $t > 0$

$$\mathcal{L}\{1\} = \int_0^{\infty} e^{-st} dt = -\frac{e^{-st}}{s} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{s} (-e^{-\infty} + e^0) = \frac{1}{s} \quad \text{para } s > 0.$$

- $F(t) = e^{kt}$ con $t > 0$

$$\mathcal{L}\{e^{kt}\} = \int_0^{\infty} e^{-st} e^{kt} dt = -\frac{e^{-t(s-k)}}{(s-k)} \Big|_0^{\infty} = -\frac{1}{s-k} (e^{-\infty} - 1) = \frac{1}{s-k}.$$

$$\therefore \mathcal{L}\{e^{kt}\} = \frac{1}{s-k} \quad \text{válida para } s > k. \quad (9.6)$$

- $F(t) = \cosh kt = \frac{1}{2}(e^{kt} + e^{-kt})$

$$\mathcal{L}\{\cosh kt\} = \mathcal{L}\left\{\frac{1}{2}(e^{kt} + e^{-kt})\right\}$$

pero \mathcal{L} es un operador lineal $\mathcal{L}\{aF(t) + bG(t)\} = a\mathcal{L}\{F(t)\} + b\mathcal{L}\{G(t)\}$, con lo cual

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{\cosh kt\} &= \frac{1}{2}\mathcal{L}\{e^{kt}\} + \frac{1}{2}\mathcal{L}\{e^{-kt}\} = \frac{1}{2} \frac{1}{s-k} + \frac{1}{2} \frac{1}{s+k} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{s+k + s-k}{s^2 - k^2} \right) = \frac{s}{s^2 - k^2} \end{aligned}$$

$$\therefore \mathcal{L}\{\cosh kt\} = \frac{s}{s^2 - k^2} \quad \text{válida para } s > k. \quad (9.7)$$

- $F(t) = \sinh kt = \frac{1}{2}(e^{kt} - e^{-kt})$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{\sinh kt\} &= \frac{1}{2}\mathcal{L}\{e^{kt}\} - \frac{1}{2}\mathcal{L}\{e^{-kt}\} = \frac{1}{2} \frac{1}{s-k} - \frac{1}{2} \frac{1}{s+k} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{s+k - s+k}{s^2 - k^2} \right) = \frac{k}{s^2 - k^2} \end{aligned}$$

$$\therefore \mathcal{L}\{\sinh kt\} = \frac{k}{s^2 - k^2} \quad \text{válida para } s > k. \quad (9.8)$$

Dado que $\cos kt = \cosh ikt$ y $\sin kt = -i \sinh ikt$, las transformadas de Laplace son

-

$$\mathcal{L}\{\cos kt\} = \mathcal{L}\{\cosh ikt\} = \frac{s}{s^2 - (ik)^2} = \frac{s}{s^2 - k^2}, \quad (9.9)$$

-

$$\mathcal{L}\{\sin kt\} = \mathcal{L}\{-i \sinh ikt\} = -i \frac{ik}{s^2 - (ik)^2} = \frac{k}{s^2 + k^2}, \quad (9.10)$$

las cuales son válidas para $s > 0$.

$$\blacksquare F(t) = t^n$$

$$\mathcal{L}\{t^n\} = \int_0^{\infty} e^{-st} t^n dt \quad \text{con } s > 0, n > -1, \quad (9.11)$$

evaluando la integral tenemos

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} t^n e^{-st} dt &= -\frac{1}{s} \int_0^{\infty} t^n d(e^{-st}) = \frac{1}{s} \int_0^{\infty} [d(t^n e^{-st}) - n t^{n-1} e^{-st} dt] \\ &= -\frac{1}{s} t^n e^{-st} \Big|_0^{\infty} + \frac{n}{s} \int_0^{\infty} t^{n-1} e^{-st} dt = \frac{n(n-1)}{s^2} \int_0^{\infty} t^{n-2} e^{-st} dt \\ &= \frac{n(n-1) \cdots (n-(n-1))}{s^n} \int_0^{\infty} t^{n-n} e^{-st} dt = \frac{n!}{s^n} \int_0^{\infty} e^{-st} dt \\ &= -\frac{n!}{s^{n+1}} e^{-st} \Big|_0^{\infty} = \frac{n!}{s^{n+1}}. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}}. \quad (9.12)$$

9.1.2. Relación entre las transformadas de Laplace y Fourier

Definición 9.1.3 Definamos la función $f_+(x)$ de la siguiente manera

$$f_+(x) = \begin{cases} f(x) dx, & x > 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases} \quad (9.13)$$

entonces la transformada de Fourier de $f_+(x)$ será, $F_+(x)$ y estará dada por

$$F_+(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} f(x) e^{ikx} dx \quad \Rightarrow \quad f(s) = \sqrt{2\pi} F_+(is) \quad (9.14)$$

La transformada inversa

La transformada de Laplace carecerá de sentido si no somos capaces de calcular la transformada inversa como lo hicimos con la serie de Fourier

$$\mathcal{L}\{F(t)\} = f(s) \quad \text{y} \quad \mathcal{L}^{-1}\{f(s)\} = F(t). \quad (9.15)$$

Una forma de encontrar esta transformación inversa utiliza justo la transformada de Fourier inversa. Sin embargo existe una dificultad. En la transformada de Fourier, las funciones $f(x)$ tienen que satisfacer las condiciones de Dirichlet, definidas en 2.1.1. En particular pedimos que $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ (con la excepción de las funciones seno y coseno las cuales están acotadas). Sin embargo en el caso de la transformada de Laplace, nuestras funciones $F(t)$ pueden ser divergentes exponencialmente ¿Qué hacemos? Para vencer este obstáculo extraemos un factor exponencial $e^{\gamma t}$ (con $\gamma \in \mathbb{R}^+$) de nuestra función y escribimos

$$f(t) = e^{\gamma t} g(t). \quad (9.16)$$

Si $f(t)$ diverge como $e^{\alpha t}$, requerimos que $\gamma > \alpha$ de tal manera que $g(t)$ sea convergente.

Definición 9.1.4 *Definimos entonces*

$$g_+(x) = \begin{cases} g(x) & x > 0, \\ 0 & x < 0, \end{cases} \quad (9.17)$$

y la transformada de Fourier $G_+(k)$ de esta función está bien definida

$$G_+(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} g(x) e^{-ikx} dx. \quad (9.18)$$

Por el teorema de Fourier podemos tomar la transformada de Fourier inversa de la función $G_+(k)$ para obtener nuevamente $g_+(x)$

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} G_+(k) e^{ikx} dk = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} dx \int_0^{\infty} g(y) e^{-iky} dy. \quad (9.19)$$

Tenemos así

$$\begin{aligned} e^{-\gamma x} f(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} dk \int_0^{\infty} e^{-iky} e^{-\gamma y} f(y) dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} dk \int_0^{\infty} e^{-y(\gamma+ik)} f(y) dy. \end{aligned}$$

Realizando el cambio de variable $s = \gamma + ik$ ($s \in \mathbb{C}$) tenemos

$$e^{-\gamma x} f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{(s-\gamma)x} (-ids) \int_0^{\infty} e^{-ys} f(y) dy, \quad (9.20)$$

de lo cual obtenemos finalmente

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{sx} ds \underbrace{\int_0^{\infty} e^{-sy} f(y) dy}_{\mathcal{L}f(y)}, \quad (9.21)$$

la cual se conoce como

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{sx} \mathcal{L}\{f(y)\} ds, \quad \text{Integral de Bromwich.} \quad (9.22)$$

Esta integral tiene algunas propiedades que es conveniente remarcar:

- Para que esta integral converja debe suceder que: $Re(s) \geq \gamma$.
- La transformada de Laplace ha mapeado una función especificada sobre el eje real positivo al plano complejo: $Re(s) \geq \gamma$, $ds = idk$.
- La constante real γ se puede elegir arbitrariamente, sujeta únicamente al requisito de que el contorno no esté a la derecha de cualquier singularidad de $f(s)$.

- Cualquier elección de γ que logre este propósito es válida y la respuesta no depende del valor de γ .

Ejemplo 9.1.5 *Supongamos que tenemos la función transformada*

$$f_L(s) = \frac{1}{s-a} \quad \text{con } a = \text{cte.} \in \mathbb{R}. \quad (9.23)$$

¿Cuál es su inversa? La función $f_L(s)$ tiene un polo en $s = a \Rightarrow$ debemos tomar un contorno con $\gamma > a$, note que para $x > 0$, e^{sx} es pequeña en el semicírculo. Así

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{e^{sx}}{s-a} = e^{ax}, \quad \text{donde hemos calculado el residuo.} \quad (9.24)$$

Concluimos entonces que

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s-a} \right\} = e^{ax}. \quad (9.25)$$

La segunda forma de determinar la transformada inversa es construir una tabla y utilizarla para calcular más transformadas inversas, de la misma manera que utilizamos una tabla de logaritmos para calcular anti-logaritmos.

9.1.3. Desarrollo en fracciones parciales

El desarrollo de $f(s)$ en fracciones parciales, nos permite obtener la transformada inversa de $f(s)$ utilizando una tabla. Esto se hace en los casos en que

$$f(s) = \frac{g(s)}{h(s)}, \quad (9.26)$$

donde $g(s)$ y $h(s)$ son polinomios sin factores comunes y donde la máxima potencia de $g(s)$ es de menor grado que la máxima potencia de $h(s)$.

Si los factores de $h(s)$ son todos lineales y diferentes, entonces de acuerdo a la teoría de fracciones parciales podemos escribir

$$f(s) = \frac{c_1}{s-a_1} + \frac{c_2}{s-a_2} + \cdots + \frac{c_n}{s-a_n}, \quad (9.27)$$

donde las c_i son independientes de s . Si alguna de las raíces es múltiple (ocurre m -veces), entonces $f(s)$ tiene la forma

$$f(s) = \frac{c_{1,m}}{(s-a_1)^m} + \frac{c_{1,m-1}}{(s-a_1)^{m-1}} + \cdots + \frac{c_{1,1}}{s-a_1} + \sum_{i=2}^n \frac{c_i}{s-a_i}. \quad (9.28)$$

Finalmente si uno de los factores es cuadrático ($s^2 + ps + q$), el numerador, en vez de ser una constante tiene la forma

$$\frac{as+b}{s^2+ps+q}. \quad (9.29)$$

Ejemplo 9.1.6 *Calcule*

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{(s+a)(s+b)} \right\}. \quad (9.30)$$

Como

$$\begin{aligned} \frac{1}{(s+a)(s+b)} &= \frac{c_1}{(s+a)} + \frac{c_2}{(s+b)} = \frac{c_1(s+b) + c_2(s+a)}{(s+a)(s+b)} \\ &= \frac{s(c_1+c_2) + c_1b + c_2a}{(s+a)(s+b)} = \frac{1}{(s+a)(s+b)}, \end{aligned}$$

para que la igualdad se satisfaga debe suceder que: $c_1 + c_2 = 0 \Rightarrow c_1 = -c_2$. También debe suceder que $c_1b + c_2a = 1$, pero como $c_1 = -c_2$, entonces $c_2(a-b) = 1 \Rightarrow c_2 = \frac{1}{a-b}$. Tenemos entonces que

$$\frac{1}{(s+a)(s+b)} = \frac{1}{b-a} \frac{1}{s+a} + \frac{1}{a-b} \frac{1}{s+b},$$

y utilizando la linealidad de \mathcal{L}

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{(s+a)(s+b)} \right\} = \frac{1}{b-a} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s+a} \right\} + \frac{1}{a-b} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s+b} \right\}.$$

Pero sabemos de (9.6) que la transformada de Laplace de la función exponencial es

$$\mathcal{L}\{e^{kt}\} = \frac{1}{s-k} \Rightarrow \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s+a} \right\} = e^{-at} \quad \text{y} \quad \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s+b} \right\} = e^{-bt},$$

con lo cual

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{(s+a)(s+b)} \right\} = \frac{1}{b-a} e^{-at} + \frac{1}{a-b} e^{-bt} = \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{b-a}, \quad a \neq b. \quad (9.31)$$

Ejemplo 9.1.7 *Evalúe la integral definida*

$$F(t) = \int_0^{\infty} \frac{\sin tx}{x} dx, \quad (9.32)$$

utilizando la transformada de Laplace.

Tomemos la transformada de Laplace de esta integral definida e impropia

$$\mathcal{L}\{F(t)\} = \mathcal{L} \left\{ \int_0^{\infty} \frac{\sin tx}{x} dx \right\} = \int_0^{\infty} e^{-st} dt \int_0^{\infty} \frac{\sin tx}{x} dx$$

Intercambiando integrales tenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{F(t)\} &= \int_0^{\infty} \frac{1}{x} dx \int_0^{\infty} e^{-st} \sin tx dt = \int_0^{\infty} \frac{1}{x} \mathcal{L}\{\sin tx\} dx \\ &= \int_0^{\infty} \frac{1}{x} \left(\frac{x}{x^2 + s^2} \right) dx = \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2 + s^2} = \frac{1}{s} \arctan \left(\frac{x}{s} \right) \Big|_0^{\infty} = \frac{\pi}{2s} = f(s). \end{aligned}$$

Ahora como dice la canción, de reversa ...

$$F(t) = \mathcal{L}^{-1}\{f(s)\} = \frac{\pi}{2} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} = \frac{\pi}{2}, \quad (9.33)$$

ya que: $\mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s} \Rightarrow \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} = 1$

$$\therefore \int_0^{\infty} \frac{\sin tx}{x} dx = \frac{\pi}{2}, \quad t > 0. \quad (9.34)$$

¿Qué pasa si $t < 0$? Como la función seno es una función impar $\sin tx = \sin(-|t|x) = -\sin(|t|x)$, en esta caso, $F(t) = -F(|t|) = -\frac{\pi}{2}$. Finalmente note que $F(0) = 0$.

$$\therefore F(t) = \int_0^{\infty} \frac{\sin tx}{x} dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & t > 0 \\ 0, & t = 0 \\ -\frac{\pi}{2}, & t < 0 \end{cases} \quad (9.35)$$

Así $\int_0^{\infty} \frac{\sin tx}{x} dx$, vista como una función de t , describe una función escalón de altura π en $t = 0$.

9.2. Clase 29

9.2.1. Transformada de Laplace de derivadas

Tal vez la aplicación más importante de las transformadas de Laplace es la de convertir ecuaciones diferenciales en ecuaciones más simples, que pueden resolverse más fácil. Por ejemplo veremos, que las ecuaciones diferenciales acopladas con coeficientes constantes se transforman simultáneamente a ecuaciones lineales algebraicas.

El resultado análogo al de las transformadas de Fourier para las derivadas de una función, es un poco más intrincado para la transformada de Laplace, debido a que el rango de integración es semi-infinito.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{F'(t)\} &= \int_0^{\infty} e^{-st} \frac{dF(t)}{dt} dt = \int_0^{\infty} \left[\frac{d}{dt} (e^{-st} F(t)) + se^{-st} F(t) \right] dt \\ &= e^{-st} F(t) \Big|_0^{\infty} + s \int_0^{\infty} e^{-st} F(t) dt = s\mathcal{L}\{F(t)\} - F(0^+). \end{aligned}$$

Recuerde que $F(0^+)$ es una función que es evaluada en $t = 0$ por la derecha. Para la

segunda derivada tenemos

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{F^{(2)}(t)\} &= \int_0^\infty e^{-st} \frac{d^2 F(t)}{dt^2} dt = \int_0^\infty \left[\frac{d}{dt} \left(e^{-st} \frac{dF(t)}{dt} \right) + s e^{-st} \frac{dF(t)}{dt} \right] dt \\ &= e^{-st} \frac{dF(t)}{dt} \Big|_0^\infty + s \int_0^\infty e^{-st} \frac{dF(t)}{dt} dt = -F'(0^+) + s \mathcal{L}\{F'(t)\} \quad (9.36) \\ &= s^2 \mathcal{L}\{F(t)\} - sF(0^+) - F'(0^+)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vdots &= \vdots \\ \mathcal{L}\{F^{(n)}(t)\} &= s^n \mathcal{L}\{F(t)\} - s^{n-1}F(0^+) - s^{n-2}F'(0^+) - \dots - F^{(n-1)}(0^+). \quad (9.37)\end{aligned}$$

Ejemplo 9.2.1 *Obtengamos la transformada de Laplace del $\cos kt$, utilizando la identidad*

$$-k^2 \cos kt = \frac{d^2}{dt^2} \cos kt. \quad (9.38)$$

Tenemos entonces que

$$\begin{aligned}-k^2 \mathcal{L}\{\cos kt\} &= \mathcal{L}\left\{ \frac{d^2}{dt^2} \cos kt \right\} = s^2 \mathcal{L}\{\cos kt\} - s \cos(k0^+) - \frac{d}{dt} \cos kt \Big|_{t=0^+} \\ &= s^2 \mathcal{L}\{\cos kt\} - s + k \underbrace{\sin k0^+}_{=0} \Rightarrow (k^2 + s^2) \mathcal{L}\{\cos kt\} = s.\end{aligned}$$

Obteniendo finalmente

$$\mathcal{L}\{\cos kt\} = \frac{s}{k^2 + s^2}. \quad (9.39)$$

Verifique lo mismo para el $\sin kt$.

Ejemplo 9.2.2 *Oscilador armónico simple*

Sabemos que la segunda ley de Newton es en este caso

$$m \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + kx(t) = 0, \quad (9.40)$$

sujeta las condiciones iniciales: $x(0) = x_0$ y $x'(0) = 0$. Aplicando la transformada de Laplace a ambos lados de la ecuación tenemos

$$m \mathcal{L}\left\{ \frac{d^2 x(t)}{dt^2} \right\} + k \mathcal{L}\{x(t)\} = 0. \quad (9.41)$$

Aplicando la relación (9.37) que hemos obtenido para la transformada de Laplace de las derivadas tenemos

$$\begin{aligned}m [s^2 \mathcal{L}\{x(t)\} - sx(t=0^+) - x'(t=0^+)] + k \mathcal{L}\{x(t)\} &= \\ ms^2 x(s) - msx_0 + kx(s) &= 0.\end{aligned}$$

$$\Rightarrow x(s) = \frac{msx_0}{ms^2 + k} = x_0 \frac{s}{s^2 + \frac{k}{m}} \equiv x_0 \frac{s}{s^2 + \omega_0^2} \quad \text{con } \omega_0^2 \equiv \frac{k}{m}, \quad (9.42)$$

y así

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{x(s)\} = x_0 \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2 + \omega_0^2}\right\} = x_0 \cos \omega_0 t. \quad (9.43)$$

Concluimos entonces que

$$x(t) = x_0 \cos \omega_0 t. \quad (9.44)$$

De manera más general, si $x(0)$ y $\frac{dx}{dt}(0)$ son ambos no nulos entonces

$$ms^2x(s) - smx(0) - mx'(0) + kx(s) = 0 \quad (9.45)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow x(s) &= \frac{msx(0) + mx'(0)}{ms^2 + k} = x(0) \frac{s}{s^2 + \omega_0^2} + x'(0) \frac{1}{s^2 + \omega_0^2} \\ \Rightarrow x(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{x(s)\} = x(0) \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2 + \omega_0^2}\right\} + \frac{x'(0)}{\omega_0} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}\right\}. \end{aligned}$$

Obteniendo finalmente

$$x(t) = x(0) \cos \omega_0 t + \frac{x'(0)}{\omega_0} \sin \omega_0 t. \quad (9.46)$$

Tal vez usted esté pensando que hemos utilizado un martillo para abrir una nuez.

9.2.2. Función delta de Dirac

Cuando se realiza la transformada de Laplace en ecuaciones diferenciales, es útil conocer la transformada de Fourier de la función delta

$$\mathcal{L}\{\delta(t - t_0)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} \delta(t - t_0) dt = e^{-st_0} \quad \text{para } t_0 \geq 0, \quad (9.47)$$

y para $t_0 = 0$

$$\mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1. \quad (9.48)$$

Desde luego hemos supuesto que estamos utilizando una representación de la función delta tal que

$$\int_0^{\infty} \delta(t) dt = 1, \quad \delta(t) = 0, \quad \text{para } t > 0 \quad (9.49)$$

Como un método alternativo, podemos considerar la distribución $\delta(t)$ como una secuencia δ : $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} F(t)$, donde

$$F(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ \frac{1}{\epsilon}, & 0 < t < \epsilon, \\ 0, & t > \epsilon. \end{cases} \quad (9.50)$$

Por cálculo directo se tiene que la transformada de Laplace es

$$\mathcal{L}\{F(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} F(t) dt = \int_0^{\epsilon} e^{-st} \frac{1}{\epsilon} dt = \frac{1}{\epsilon} \left(-\frac{1}{s} \right) e^{-st} \Big|_0^{\epsilon} = \frac{1 - e^{-s\epsilon}}{s\epsilon}.$$

Así en el límite

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathcal{L}\{F(t)\} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1 - e^{s\epsilon}}{s\epsilon} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{se^{-s\epsilon}}{s} = 1. \quad (9.51)$$

Ejemplo 9.2.3 Fuerza Impulsiva

La 2a. ley de Newton para una fuerza impulsiva actuando sobre una partícula de masa m es

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = P\delta(t), \quad (9.52)$$

donde $P = cte.$

Aplicando la transformada de Laplace a esta ecuación tenemos

$$ms^2 x(s) - msx(0^+) - mx'(0^+) = P. \quad (9.53)$$

Para una partícula que comience del reposo $x'(0) = 0$. También consideraremos: $x(0) = 0$. Entonces

$$x(s) = \frac{P}{ms^2}, \quad (9.54)$$

y

$$\mathcal{L}^{-1}\{x(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{P}{ms^2}\right\} \Rightarrow x(t) = \frac{P}{m} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\}. \quad (9.55)$$

$$\therefore x(t) = \frac{P}{m} t \quad y \quad \frac{dx(t)}{dt} = \frac{P}{m} = cte. \quad (9.56)$$

El efecto del impulso $P\delta(t)$ es transferir (instantáneamente) P unidades de momento lineal a la partícula.

9.2.3. Propiedad de traslación

Esta propiedad nos permite calcular la transformada de Laplace de $e^{at}f(t)$ siempre que ya se conozca la transformada de la función $f(t)$

Teorema 9.2.4 *Si*

$$\mathcal{L}\{F(t)\} = f(s), \quad \text{entonces,} \quad \mathcal{L}\{e^{at}F(t)\} = f(s - a). \quad (9.57)$$

Demostración

$$\mathcal{L}\{e^{at}F(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} e^{at} F(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-(s-a)t} F(t) dt = f(s - a). \quad (9.58)$$

Ejemplo 9.2.5

$$\mathcal{L}\{e^{at} \sin kt\} = \frac{k}{(s-a)^2 + k^2} \quad (9.59)$$

$$\mathcal{L}\{e^{at} \cos kt\} = \frac{s-a}{(s-a)^2 + k^2} \quad (9.60)$$

Ejemplo 9.2.6 *Obtenga la transformada de Fourier de $\mathcal{L}\{e^{-2t} \cos 3t\}$.*

Dado que

$$\mathcal{L}\{\cos 3t\} = \frac{s}{s^2 + 9} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L}\{e^{-2t} \cos 3t\} = \frac{s+2}{(s+2)^2 + 9}. \quad (9.61)$$

En términos de la transformada de Laplace inversa, el resultado puede ser reescrito de la siguiente manera

$$\mathcal{L}\{e^{at} F(t)\} = f(s-a) \quad \Rightarrow \quad \underbrace{\mathcal{L}^{-1} \mathcal{L}}_{=1} \{e^{at} F(t)\} = \mathcal{L}^{-1}\{f(s-a)\}.$$

Pero $F(t) = \mathcal{L}^{-1}\{f(s)\}$, entonces

$$e^{at} \mathcal{L}^{-1}\{f(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\{f(s-a)\} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L}^{-1}\{f(s)\} = e^{at} \mathcal{L}^{-1}\{f(s-a)\}.$$

De donde concluimos finalmente que

$$\mathcal{L}^{-1}\{f(s)\} = e^{at} \mathcal{L}^{-1}\{f(s+a)\} \quad (9.62)$$

Ejemplo 9.2.7 *Calcule la transformada inversa del cociente*

$$\frac{2s+3}{s^2-4s+20}.$$

Dado que

$$\frac{2s+3}{s^2-4s+20} = \frac{2s+3}{(s-2)^2+16} = \frac{2(s-2)+7}{(s-2)^2+16} = 2 \frac{s-2}{(s-2)^2+16} + \frac{7}{4} \frac{4}{(s-2)^2+16}$$

entonces

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{2s+3}{s^2-4s+20} \right\} = 2 \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s-2}{(s-2)^2+16} \right\} + \frac{7}{4} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{4}{(s-2)^2+16} \right\},$$

de donde obtenemos finalmente

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{2s+3}{s^2-4s+20} \right\} = 2e^{2t} \cos 4t + \frac{7}{4} e^{2t} \sin 4t. \quad (9.63)$$

Ejemplo 9.2.8 *Oscilador amortiguado.*

Consideremos una masa oscilando con un término de amortiguamiento proporcional a la velocidad. La ecuación

$$m \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + kx(t) = 0, \quad (9.64)$$

se modifica por un término proporcional a x'

$$mx''(t) + bx'(t) + kx(t) = 0, \quad (9.65)$$

en la cual b es una constante de proporcionalidad. Supongamos que las condiciones iniciales son que la masa comienza su movimiento del reposo: $x(0) = x_0$ y $x'(0) = 0$. Aplicando la transformada de Laplace a la ecuación obtenemos

$$m[s^2 x(s) - sx(0)] + b[sx(s) - x(0)] + kx(s) = 0,$$

con lo cual

$$x(s)(ms^2 + bs + k) = (sm + b)x_0 \Rightarrow x(s) = x_0 \frac{ms + b}{ms^2 + bs + k} = x_0 \frac{s + \frac{b}{m}}{s^2 + \frac{b}{m}s + \frac{k}{m}}.$$

Para obtener la transformada inversa debemos completar el cuadro en el denominador

$$s^2 + \frac{b}{m}s + \frac{k}{m} = \left(s + \frac{b}{2m}\right)^2 + \frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}. \quad (9.66)$$

Si el amortiguamiento es pequeño

$$\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2} > 0 \Rightarrow \frac{b^2}{4m^2} < \frac{k}{m} \Rightarrow b^2 < 4km. \quad (9.67)$$

Definiendo: $\omega_1^2 = \frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}$ tenemos

$$\begin{aligned} x(s) &= x_0 \frac{s + \frac{b}{m}}{\left(s + \frac{b}{2m}\right)^2 + \omega_1^2} = x_0 \frac{s + \frac{b}{2m} + \frac{b}{2m}}{\left(s + \frac{b}{2m}\right)^2 + \omega_1^2} \\ &= x_0 \frac{s + \frac{b}{2m}}{\left(s + \frac{b}{2m}\right)^2 + \omega_1^2} + x_0 \frac{b}{2m\omega_1} \frac{\omega_1}{\left(s + \frac{b}{2m}\right)^2 + \omega_1^2}, \end{aligned}$$

con lo cual

$$\begin{aligned} x(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{x(s)\} = x_0 \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s + \frac{b}{2m}}{\left(s + \frac{b}{2m}\right)^2 + \omega_1^2}\right\} + x_0 \frac{b}{2m\omega_1} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\omega_1}{\left(s + \frac{b}{2m}\right)^2 + \omega_1^2}\right\} \\ &= x_0 e^{-\frac{b}{2m}t} \cos \omega_1 t + x_0 \frac{b}{2m\omega_1} e^{-\frac{b}{2m}t} \sin \omega_1 t. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$x(t) = x_0 e^{-\frac{b}{2m}t} \left(\cos \omega_1 t + \frac{b}{2m\omega_1} \sin \omega_1 t \right). \quad (9.68)$$

Esta expresión puede ser reescrita como

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 e^{\frac{-bt}{2m}} (\cos \omega_1 t + \tan \varphi \sin \omega_1 t) = x_0 e^{\frac{-bt}{2m}} \left(\cos \omega_1 t + \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} \sin \omega_1 t \right) \\ &= \frac{x_0 e^{\frac{-bt}{2m}}}{\cos \varphi} (\cos \omega_1 t \cos \varphi + \sin \omega_1 t \sin \varphi) = \frac{x_0 e^{\frac{-bt}{2m}}}{\cos \varphi} \cos(\omega_1 t - \varphi). \end{aligned}$$

Como: $\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1 \Rightarrow \tan^2 \varphi + 1 = \frac{1}{\cos^2 \varphi}$, pero en términos de ω_1

$$\tan^2 \varphi = \frac{b^2}{(2m\omega_1)^2} = \frac{1}{\omega_1^2} \left(\frac{b^2}{4m^2} \right) = \frac{1}{\omega_1^2} \left(\frac{k}{m} - \omega_1^2 \right) = \frac{k}{m\omega_1^2} - 1.$$

Utilizando este resultado en la identidad trigonométrica tenemos

$$\frac{k}{m\omega_1^2} - 1 + 1 = \frac{1}{\cos^2 \varphi} \Rightarrow \frac{\sqrt{\frac{k}{m}}}{\omega_1} = \frac{1}{\cos \varphi}, \quad \text{pero, } \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow \frac{1}{\cos \varphi} = \frac{\omega_0}{\omega_1}.$$

Concluimos así que la solución buscada es

$$x(t) = x_0 \frac{\omega_0}{\omega_1} e^{-\frac{bt}{2m}} \cos(\omega_1 t - \varphi) \quad (9.69)$$

Note que en el límite $b \rightarrow 0$ (situación en la que no hay amortiguamiento), $\varphi \rightarrow 0$ y $\omega_1 \rightarrow \omega_0$, con lo cual la solución se reduce a

$$x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t), \quad (9.70)$$

como habíamos obtenido.

9.3. Clase 30

9.3.1. Analogía RLC

En su curso de Electrodinámica usted estudia circuitos RLC (resistencia-inductancia-capacitancia). De acuerdo con la ley de conservación de energía de Kirchhoff, en cualquier instante de tiempo, la suma de las diferencias de potencial alrededor de un circuito cerrado RLC debe ser cero. Analíticamente esta afirmación se escribe como

$$L \frac{dI}{dt} + RI + \frac{1}{C} \int^t I dt = 0. \quad (9.71)$$

Derivando la corriente respecto al tiempo tenemos

$$L \frac{d^2 I}{dt^2} + R \frac{dI}{dt} + \frac{1}{C} I = 0. \quad (9.72)$$

Comparando esta ecuación con la del oscilador amortiguado

$$mx''(t) + bx'(t) + kx(t) = 0, \quad (9.73)$$

tenemos que si reemplazamos

$$\begin{aligned} I(t) &\rightarrow X(t) \\ L &\rightarrow m \\ R &\rightarrow b \\ C^{-1} &\rightarrow k \end{aligned}$$

El problema RLC es idéntico al problema mecánico del oscilador amortiguado.

9.3.2. Traslación

Multipliquemos la función transformada $f(s)$ por e^{-bs} , $b > 0$

$$\Rightarrow e^{-bs}f(s) = e^{-bs} \int_0^{\infty} e^{-st}F(t)dt = \int_0^{\infty} e^{-s(t+b)}F(t) dt. \quad (9.74)$$

Realizando el cambio de variable: $t + b = \tau$, tenemos

$$e^{-bs}f(s) = \int_b^{\infty} e^{-s\tau}F(\tau - b) d\tau. \quad (9.75)$$

Dado que suponemos que $F(t) = 0$, para $t < 0$, entonces la función $F(\tau - b) = 0$, para $\tau < b$, en particular en el intervalo $0 \leq \tau < b$. Por tanto podemos extender el límite inferior de integración a 0 sin que cambie el valor de la integral

$$e^{-bs}f(s) = \int_b^{\infty} e^{-s\tau}F(\tau - b) d\tau = \int_0^{\infty} e^{-s\tau}F(\tau - b) d\tau = \mathcal{L}\{F(t - b)\} \quad (9.76)$$

Ejemplo 9.3.1 Ondas electromagnéticas.

La ecuación de una onda electromagnética (TEM) propagándose a lo largo del eje x es

$$\frac{\partial^2 E(x, t)}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 E(x, t)}{\partial t^2} = 0 \quad \text{con: } E = E_y \text{ o } E_z, \quad (9.77)$$

donde v es la velocidad de la onda en un medio. Si el medio es el vacío, $v = c$.

Transformando esta ecuación respecto a la variable t

$$\mathcal{L} \left\{ \frac{\partial^2 E(x, t)}{\partial x^2} \right\} - \frac{1}{v^2} \mathcal{L} \left\{ \frac{\partial^2 E(x, t)}{\partial t^2} \right\} = 0. \quad (9.78)$$

Utilizando la ecuación para la transformada de Laplace de las derivadas tenemos

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}\{E(x, t)\}}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \left(s^2 \mathcal{L}\{E(x, t)\} - sE(x, t=0) + \frac{\partial E(x, t)}{\partial t} \Big|_{t=0} \right) = 0. \quad (9.79)$$

Si tenemos la condición inicial: $E(x, 0) = 0$ y $\frac{\partial E(x, t)}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0$, entonces la ecuación se simplifica

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \mathcal{L}\{E(x, t)\} = \frac{s^2}{v^2} \mathcal{L}\{E(x, t)\}. \quad (9.80)$$

La solución a esta ecuación diferencial ordinaria es

$$\mathcal{L}\{E(x, t)\} = c_1 e^{-sx/v} + c_2 e^{sx/v}. \quad (9.81)$$

Las constantes c_1 y c_2 se obtienen de condiciones de frontera adicionales. Si nuestra onda permanece finita cuando: $x \rightarrow \infty$, entonces $\mathcal{L}\{E(x, t)\} \rightarrow$ finita, y como

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{s \frac{x}{v}} \rightarrow \infty \quad \Rightarrow \quad c_2 = 0. \quad (9.82)$$

De lo cual concluimos que

$$\mathcal{L}\{E(x, t)\} = c_1 e^{-s \frac{x}{v}}. \quad (9.83)$$

Si denotamos $F(t) = E(x=0, t)$, entonces

$$\mathcal{L}\{F(t)\} = c_1 e^{-sx/v}, \quad (9.84)$$

pero c_1 ya no es una constante, ésta se generaliza en la forma $c_1 = f(s)$ y

$$e^{-s \frac{x}{v}} f(s) = \mathcal{L}\{F(t - \frac{x}{v})\}, \quad (9.85)$$

De donde concluimos que

$$E(x, t) = \begin{cases} F(t - \frac{x}{v}), & t \geq \frac{x}{v}, \\ 0, & t < \frac{x}{v}, \end{cases} \quad (9.86)$$

que representa una onda o pulso moviéndose en la dirección x -positiva con velocidad v . Note que para $x > vt$, la región permanece imperturbable, el pulso no ha tenido tiempo de llegar ahí.

De manera análoga, si queremos una señal propagándose a lo largo del eje x -negativo, $c_1 = 0$ y

$$E(x, t) = \begin{cases} F(t + \frac{x}{v}), & t \geq -\frac{x}{v}, \\ 0, & t < -\frac{x}{v}. \end{cases} \quad (9.87)$$

Deseamos concluir nuestra exposición, remarcando nuevamente que en este curso sólo se han estudiado un número pequeño de funciones especiales ortogonales y de transformadas Integrales. Sin embargo los casos estudiados son los más relevantes para poder comprender los cursos siguientes de la carrera de física. Como el lector se podrá imaginar, existen muchos más funciones especiales y transformadas integrales que las discutidas en el curso. Recientemente se propuso publicar una enciclopedia que contenga el mayor número posible de funciones especiales conocidas. Este proyecto es conocido como el proyecto Askey-Bateman y constará de 5 volúmenes [11]. Este es sin duda el proyecto de funciones especiales más ambicioso en la actualidad.

9.4. Problemas

1. Muestre que

$$\lim_{s \rightarrow \infty} sf(s) = \lim_{t \rightarrow +0} F(t).$$

Ayuda: Suponga que se puede expresar la función $F(t)$ como $F(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$.

2. Muestre que

$$\frac{1}{\pi} \lim_{s \rightarrow 0} \mathcal{L}\{\cos xt\} = \delta(x).$$

3. Utilizando el desarrollo en fracciones parciales, muestre que

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s}{(s+a)(s+b)} \right\} = \frac{ae^{-at} - be^{-bt}}{a-b}, \quad a \neq b.$$

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s^2}{(s^2+a^2)(s^2+b^2)} \right\} = \frac{1}{a^2-b^2} (a \sin at - b \sin bt), \quad a^2 \neq b^2.$$

4. Utilizando un desarrollo en fracciones parciales, muestre que

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{(s^2+a^2)(s^2+b^2)} \right\} = -\frac{1}{a^2-b^2} \left\{ \frac{\sin at}{a} - \frac{\sin bt}{b} \right\}, \quad a \neq b.$$

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s^2}{(s^2+a^2)(s^2+b^2)} \right\} = \frac{1}{a^2-b^2} \{a \sin at - b \sin bt\}, \quad a^2 \neq b^2.$$

5. Una masa m está unida al extremo de un resorte de constante k . El resorte no está ni comprimido ni estirado. Al tiempo $t = 0$, el extremo libre del resorte experimenta una aceleración constante a en la dirección contraria a la posición de la masa. Utilizando la transformada de Laplace:

a) Encuentre la posición de la masa m como función del tiempo.

b) Determine la forma funcional de $x(t)$ para tiempos pequeños.

6. La ecuación de movimiento para un oscilador armónico amortiguado con un término de amortiguamiento proporcional a la velocidad es

$$m\ddot{X}(t) + b\dot{X}(t) + kX(t) = 0.$$

Resuelva esta ecuación de movimiento utilizando la transformada de Laplace. Considere las condiciones iniciales $X(0) = 0$ y $\dot{X}(0) = v_0$, en los tres caso posibles:

a) $b^2 < 4mk$.

b) $b^2 = 4mk$ (amortiguamiento crítico).

c) $b^2 > 4mk$ (sobreamortiguado).

7. Enuncie y demuestre el teorema de convolución para la transformada de Laplace.

8. Encuentre

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{k^2}{s(s^2 + k^2)} \right\}.$$

a) Utilizando fracciones parciales.

b) Utilizando el teorema de convolución.

c) Utilizando la integral de Bromwich.

9. Utilizando el principio de inducción matemática y las relaciones de recurrencia de las funciones de Bessel, desarrolle la transformada de Laplace de $J_n(t)$ a partir de $\mathcal{L}\{J_0(t)\}$.

10. Muestre que

$$\begin{aligned} a) \quad \mathcal{L}\{\cosh at \cos at\} &= \frac{s^3}{s^4 + 4a^4}, \\ b) \quad \mathcal{L}\{\cosh at \sin at\} &= \frac{as^2 + 2a^3}{s^4 + 4a^4}, \\ c) \quad \mathcal{L}\{\sinh at \cos at\} &= \frac{as^2 - 2a^3}{s^4 + 4a^4}, \\ d) \quad \mathcal{L}\{\sinh at \sin at\} &= \frac{2a^2s}{s^4 + 4a^4}. \end{aligned}$$

Bibliografía

- [1] Walter Appel, *Mathematics for Physics & Physicist*, Princeton University Press (2007).
- [2] George B. Arfken and Hans J. Weber, *Mathematical Methods for Physicists*, Academic Press, 5th edition (2000).
- [3] Eugene Butkov, *Mathematical Physics*, Addison-Wesley (1968). Colocación: QA401/B7.8
- [4] H. S. Carslaw, *An Introduction to the Theory of Fourier's Series and Integrals*, Dover Publications, Inc. (1959). Colocación QA404/C3.4
- [5] Tai L. Chow, *Mathematical Methods for Physicist*, Cambridge University Press (2000). Colocación QC20/Ch6.87
- [6] Ruel V. Churchill and James Ward Brown, *Fourier Series and Boundary Value Problems*, McGraw-Hill, 3rd edition (1978). Colocación: QA404/CH6
- [7] Harry Hochstadt, *The Functions of Mathematical Physics*, Dover Publications, Inc. (1986). Colocación QA351/H6.3
- [8] John D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, Wiley (1998). Colocación: QC631/J3
- [9] Philip M. Morse and Herman Feshbach, *Methods of Theoretical Physics*, 2 Vol. McGraw-Hill (1953). Colocación: QC20/M6
- [10] Barton Zwiebach, *A First Course in String Theory*, Cambridge University Press (2004). Colocación: QC794.6/S8.5/Z9.53
- [11] M. Ismail and W. Van Assche (Editors), *Encyclopedia of Special Functions*, 5 Vol.
Volume 1: Hypergeometric and Basic Hypergeometric Functions, including elliptic hypergeometric functions.
Volume 2: Orthogonal Polynomials, including matrix orthogonal polynomials and biorthogonal rational functions.
Volume 3: Continued Fractions, Number Theory, and Elliptic and Theta Functions.

Volume 4: Equations of Mathematical Physics, including continuous and discrete Painlevé, Lamé and Heun equations.

Volume 5: Multivariable Special Functions.

Índice analítico

- Armónicos esféricos, 142
- Atomo de hidrógeno, 200

- Completez de las funciones propias, 112
- Condiciones de Dirichlet, 44
- Condiciones de frontera de Cauchy, 107
- Condiciones de frontera de Dirichlet, 107
- Condiciones de frontera de Neumann, 107
- Constante de Euler-Mascheroni, 6, 12
- Convergencia de las Series de Fourier, 49
- Convergencia débil, 38
- Convergencia uniforme, 8
- Convolución, 217
- Coordenadas cilíndricas, 93
- Coordenadas esféricas, 90
- Cotinuación analítica de la función gama, 25
- Criterio de comparación, 5
- Criterio de Leibnitz, 7
- Criterio del cociente, 7

- Delta de Dirac, 32
- Desarrollo binomial, 28
- Desarrollo de Mittag-Leffler, 14
- Distribuciones, 37

- Ecuaciones de la Física, 66
- Ecuación asociada de Laguerre, 200
- Ecuación asociada de Legendre, 93, 117, 137
- Ecuación de Bessel, 95, 99, 151
- Ecuación de Chebyshev, 99
- Ecuación de Helmholtz en 2D, 78, 83
- Ecuación de Helmholtz en 3D, 86, 90, 93
- Ecuación de Hermite, 99, 178
- Ecuación de Laguerre, 99, 193

- Ecuación de Legendre, 93, 99, 117
- Ecuación de Schrödinger, 71
- Ecuación hipergeométrica, 99
- Ecuación hipergeométrica confluyente, 99

- Factorial doble, 25
- Fenómeno de Gibbs, 55
- Funciones admisibles, 38
- Funciones de Bessel de primera clase, 156
- Funciones de Bessel de segunda clase, 163
- Funciones de cuadrado integrable, 72
- Funciones de Neumann, 163
- Funciones de prueba, 38
- Funciones generadoras, 126, 189
- Funciones propias ortogonales, 111
- Función continua a pedazos, 44
- Función escalón, 52, 54
- Función factorial, 24
- Función gama, 11
- Función gama como un límite infinito, 12
- Función gama como un producto infinito, 12
- Función gama como una integral definida, 12
- Función generadora, 167, 198, 199
- Función monótona, 44
- Función zeta de Riemann, 50
- Fórmula de reflexión de la función gama, 29
- Fórmula de Rodrigues, 124, 194, 200

- Integral de Bromwich, 229
- Integral de Fourier, 206

- Mecánica Cuántica, 70
- Método de Frobenius, 117

- Operador adjunto, 103
Operador auto-adjunto, 104
Operador hermítico, 109
Oscilador armónico cuántico, 176
- Paridad de los polinomios de Legendre, 122
- Partícula en un círculo, 76
Partícula en una caja, 75
- Polinomios asociados de Laguerre, 199
Polinomios asociados de Legendre, 139
Polinomios de Hermite, 186
Polinomios de Laguerre, 194
Polinomios de Legendre, 122
- Propiedad de Filtro de la delta de Dirac, 32
- Propiedad de filtro de las derivadas, 35
Propiedad de traslación de la transformada de Laplace, 235
- Propiedades de la delta de Dirac, 37
- Puntos singulares, 95
Puntos singulares regulares, 96
- Relaciones de ortogonalidad, 132, 142, 143, 170, 185, 197, 200
- Relaciones de recurrencia, 127, 165, 186, 198
- Secuencias delta, 33
- Separación de variables, 79
- Serie armónica, 5, 7
Serie armónica alternante, 8, 10
Serie de Fourier compleja, 53
Serie de Maclaurin, 9
Serie de potencias, 10
Serie de Taylor, 9
Serie geométrica, 4, 7
- Series, 2
Series de Fourier, 44
Series de funciones, 8
- Simetría azimutal, 134
- Soluciones en serie, 117, 151
- Suma parcial, 3
- Teorema de Frobenius y Fuchs, 101
- Teorema de Parseval, 217
- Teoría de Sturm-Liouville, 105
- Transformada coseno de Fourier, 208
Transformada coseno inversa de Fourier, 208
Transformada de Fourier de las derivadas, 215
Transformada de Hankel, 204
Transformada de Laplace, 226
Transformada de Laplace de derivadas, 233
Transformada de Mellin, 204
Transformada exponencial de Fourier, 207
Transformada exponencial inversa de Fourier, 208
Transformada seno de Fourier, 208
Transformada seno inversa de Fourier, 208
- Valores propios reales, 110